TD 5 : Modèles linéaires

Exercice 1.
Montrez que la solution au problème des moindres carrés suivant

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i + b)^2$$

est

$$\hat{a} = \frac{S_{xy}}{V(x)}, \qquad \hat{b} = \overline{y} - \hat{a}\overline{x}.$$

Montrez également que

$$\hat{a} = R\frac{SD(y)}{SD(x)},$$

où R est le coefficient de corrélation entre x et y.

Exercice 2.
Considérons les couples (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$. Montrez que

$$R(x, y) = R(ax + b, y),$$

où $R(x, y)$ représente la corrélation entre x et y.

Exercice 3.

Table 1 – *Statistiques résumées de la taille des carapaces de crabes dormeurs femelles.*

	Moyenne	Écart-type
Avant mue	129mm	11mm
Après mue	144mm	10mm
R = 0.98		

Utilisez les informations contenues dans le tableau 1 pour trouver la droite des moindres carrés prédisant la taille avant mue en fonction de la taille après mue.

Trouvez également la droite des moindres carrés prédisant l'accroissement de la taille en fonction de la taille après mue sachant que la corrélation entre la taille après mue et l'accroissement est -0.45 et que l'accroissement moyen est de 14.7mm avec un écart-type de 2.2mm.

Exercice 4.
Le but de cet exercice est de montrer que $-1 \leq R \leq 1$.

a) Pour simplifier, supposons que $\overline{x} = \overline{y} = 0$ et $SD(x) = SD(y) = 1$ - nous n'avons pas besoin de considérer d'autres cas d'après l'exercice 2. Montrez que

$$R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad SD(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

b) Utilisez les inégalités suivantes pour conclure.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \geq 0.$$

Exercice 5.
Utilisez le fait que $\hat{a}$ et $\hat{b}$ minimisent

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$$

pour montrer que la moyenne des résidus est nulle.