TD 2 : Échantillonage aléatoire simple

Exercice 1.
On considère une population de 6 individus sur lesquels une variable x vaut

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 4, x_6 = 5$$

Dans la suite on travaille sur un échantillon aléatoire simple de 2 individus.

a) Calculez la distribution exacte de la moyenne de x sur l'échantillon.

b) Utilisez cette distribution exacte pour calculer l'espérance et la variance de cet estimateur.

c) Utilisez les formules du cours, qui ne sont pas à savoir, pour calculer cette espérance et cette variance. Comparez les deux résultats.

✎ ✎ ✎

Exercice 2.
Dans un sondage sur un groupe d'étudiants, 67 étudiants sur 91 étudiants interrogés ont répondu qu'ils possédaient un PC. Construire un intervalle de confiance au niveau 95% pour la proportion d'étudiants possédants un PC.

✎ ✎ ✎

Exercice 3.
En gardant les notations du cours, dîtes quels sont les éléments aléatoires ou non et expliquez pourquoi.

$$x_1, x_{I(1)}, \overline{X}, N, \mu, I(1), n$$

✎ ✎ ✎

Exercice 4.
Une approche astucieuse pour calculer la covariance entre $x_{I(1)}$ et $x_{I(2)}$ est basée sur le constat suivant. Si nous tirons aléatoirement toutes les unités de la population, alors la moyenne empirique vaut toujours la moyenne de la population, i.e., $\overline{X} = \mu$. Si tel est le cas alors $\mathrm{Var}[\overline{X}] = 0$. En utilisant ce fait et que

$$\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{n-1}{n}\mathrm{Cov}(x_{I(1)}, x_{I(2)}),$$

en déduire la covariance entre $x_{I(1)}$ et $_{I(2)}$. Puis montrez que

$$\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}.$$

✎ ✎ ✎

Exercice 5.
On considère un échantillon issue d'un échantillonnage aléatoire simple sur une population de taille $N = 100$. Supposons que $x_i = 0$ ou 1 pour tout i et que la proportion de 1 dans la population est π.

Calculez $\mathbb{E}[x_{I(1)}x_{I(2)}]$ et en déduire la covariance entre $x_{I(1)}$ et $x_{I(2)}$ pour ce cas particulier.

✎ ✎ ✎