
TD 3 : Plans à probabilités inégales

Exercice 1. Une population est composée de 6 ménages de tailles respectives 2, 4, 3, 9, 1 et 2 (la taille x_k d'un ménage k est le nombre de personnes physiques qu'il comprend). On tire 3 ménages sans remise, avec une probabilité proportionnelle à leur taille.

1. Donnez les probabilités d'inclusion des 6 ménages de la base de sondage—soyez prudent...
2. Réalisez effectivement le tirage par une méthode systématique.
3. A partir de l'échantillon obtenu en 2, donnez une estimation de la taille moyenne \bar{x} des ménages ; le résultat était-il prévisible ?



Exercice 2. On a répertorié dans une petite municipalité 6 entreprises dont les chiffres d'affaires (variable x_k) sont respectivement de 40, 10, 8, 1, 0.5 et 0.5 millions d'euros. Dans le but d'estimer l'emploi salarié total, sélectionnez trois entreprises au hasard et sans remise, à probabilités inégales selon le chiffre d'affaires, par la méthode du tirage systématique (en justifiant votre démarche). Pour ce faire, on utilise la réalisation suivante d'une variable aléatoire $U(0, 1)$: 0.83021. Que se passe-t-il si on modifie l'ordre du fichier ?



Exercice 3. Soit une population de 5 unités. On veut sélectionner par un tirage systématique à probabilités inégales un échantillon de deux unités avec des probabilités d'inclusion proportionnelles aux valeurs x_i suivantes

$$1, 1, 6, 6, 6.$$

1. Calculez les probabilités d'inclusion d'ordre un.
2. Considérant les deux unités dont la valeur x_i vaut 1, calculez leurs probabilités d'inclusion d'ordre deux pour chacune des permutations possibles du fichier. Conséquence ?



Exercice 4. Soit une population \mathcal{U} composée de 6 unités. On connaît les valeurs prises par un caractère auxiliaire x sur toutes les unités de la population :

$$x_1 = 200, \quad x_2 = 80, \quad x_3 = 50, \quad x_4 = 50, \quad x_5 = 10, \quad x_6 = 10.$$

1. Calculez les probabilités d'inclusion d'ordre un proportionnelles aux x_k pour une taille d'échantillon $n = 4$. Soit 0.48444 une réalisation d'une $U(0, 1)$. Sélectionnez un échantillon à probabilités inégales sans remise de taille 4 au moyen d'un tirage systématique, en gardant l'ordre initial du fichier.
2. Donnez la matrice des probabilités d'inclusions d'ordre deux (ordre initial du fichier fixé).
3. On suppose qu'une variable d'intérêt y prend les valeurs suivantes :

$$y_1 = 80, \quad y_2 = 50, \quad y_3 = 30, \quad y_4 = 25, \quad y_5 = 10, \quad y_6 = 5.$$

Constituez un tableau avec, en ligne chaque échantillon s possible, et en colonne les probabilités de tirage $p(s)$, les estimateurs respectifs du total $\hat{Y}(s)$ et de la variance $\widehat{\text{Var}}[\hat{Y}]$. Calculez, sur la base de ce tableau, les espérances $\mathbb{E}[\hat{Y}]$ et $\mathbb{E}[\widehat{\text{Var}}[\hat{Y}]]$. Commentez.

