TD 1 : Se familiariser avec les bases/notations

Exercice 1. Soient une population $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ et le plan $p(\cdot)$ suivant

$$p(\{1,2\}) = \frac{1}{2}, \qquad p(\{1,3\}) = \frac{1}{4}, \qquad p(\{2,3\}) = \frac{1}{4}.$$

1. Donnez les probabilités d'inclusion d'ordre un.
2. Pourquoi la somme de ces probabilités d'inclusion vaut nécessairement 2 ?
3. Donnez la matrice de variance–covariance des variables indicatrices $1_{\{k\in S\}}$, $k \in \mathcal{U}$.

✎ ✎ ✎

Exercice 2. Soient une population $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ et le plan $p(\cdot)$ suivant

$$p(\{1,2\}) = \frac{1}{2}, \qquad p(\{1,3\}) = \frac{1}{4}, \qquad p(\{2,3\}) = \frac{1}{4}.$$

1. Donnez la distribution de probabilité du π–estimateur de la moyenne μ_y pour un caractère d'intérêt y.
2. En déduire le biais de cet estimateur.

✎ ✎ ✎

Exercice 3. Soit la matrice de variance–covariance $\Delta = (\Delta_{k\ell})_{k,\ell}$ des indicatrices $1_{\{k\in S\}}$ pour un plan $p(\cdot)$ donné. On sait que

$$\Delta = \frac{6}{25}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Le plan $p(\cdot)$ est-il de taille fixe ?
2. Satisfait il aux conditions de Sen–Yates–Grundy ?
3. Sachant que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 > \pi_4 = \pi_5$, calculer les probabilités d'inclusions d'ordre 1.
4. Donnez la matrice des probabilités d'inclusions d'ordre deux.
5. Donnez les probabilités associées à tous les échantillons possibles.

✎ ✎ ✎

Exercice 4. On considère un plan sans remise effectué sur une population de taille N. On suppose que les probabilités d'inclusions d'ordre 1 et 2 π_k et $\pi_{k\ell}$ sont strictement positives. A partir d'un échantillon aléatoire S, on s'intéresse à l'estimateur suivant

$$\hat{\theta} = \frac{1}{N^2}\sum_{k\in S}\frac{y_k}{\pi_k} + \frac{1}{N^2}\sum_{\substack{k,\ell\in S \\ k\neq\ell}}\frac{y_\ell}{\pi_{k\ell}}.$$

1. Pour quelle fonction d'intérêt cet estimateur est il sans biais ?

✎ ✎ ✎

Exercice 5. 1. Montrez que

$$\frac{1}{N}\sum_{k\in\mathcal{U}}(y_k-\mu_y)^2=\frac{1}{2N^2}\sum_{\substack{k,\ell\in\mathcal{U}\\ k\neq\ell}}(y_k-y_\ell)^2.$$

2. Pour un plan sans remise quelconque mais dont les probabilités d'inclusion d'ordre 1 et 2 sont strictement positives, construisez un estimateur sans biais de σ_y^2.

✎ ✎ ✎