Modélisation Stochastique L3 MATH
2014–2015 M. Ribatet

Feuille / Lab 2

Exercice 1 (Aiguille de Buffon)**.**
L'expérience originelle de Buffon consistait à jeter une aiguille de longueur ℓ sur une grille de ligne parallèles—chaque ligne étant distantes de d.

a) Montrez que, pour $\ell \leq d$, la probabilité que l'aiguille soit à cheval sur une ligne est $2\ell/(\pi d)$. En déduire un estimateur pour $\psi = 1/\pi$.

b) Trouvez la variance de cet estimateur et déduisez en un choix optimal pour ℓ et d.

c) Avec ce choix optimal, construisez un estimateur de π.

d) Implémentez le tout en `R` et analysez le comportement de votre estimateur.

✎ ✎ ✎

Exercice 2 (Probabilités de dépassement d'une Cauchy)**.**
Supposons que nous souhaitions estimer la probabilité qu'une $X \sim$ Cauchy$(0,1)$ soit plus grande que 2, i.e.,

$$\psi = \int_2^\infty \left\{\pi(1+x^2)\right\}^{-1} \mathrm{d}x = -\frac{\arctan 2}{\pi} + \frac{1}{2} \approx 0.15.$$

a) Trouvez un estimateur basique par Monte–Carlo pour ψ et déterminez sa variance.

b) Trouvez un estimateur antithétique (simple) pour ψ et déterminez sa variance.

c) Montrez que

$$\hat{\psi}_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{2}{\pi(1+X_i^2)}, \qquad X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,2),$$

est un estimateur sans biais pour ψ, i.e., $\mathbb{E}(\hat{\psi}_3) = \psi$ et calculez sa variance.

d) Faites de même pour l'estimateur

$$\hat{\psi}_4 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left\{\frac{1}{2\pi(1+X^2)}\right\}, \qquad X_1,\dots,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1/2).$$

e) Ecrivez un code `R` permettant de comparer la vitesse de convergence des ces 4 estimateurs.

✎ ✎ ✎

Exercice 3 (Evaluation d'une intégrale par Monte–Carlo)**.**
On s'intéresse à l'intégrale suivante

$$\psi = \int_0^1 \left\{\cos(50x) + \sin(20x)\right\}^2 \mathrm{d}x.$$

a) Faites le graphe de cette fonction à l'aide de `R`.

b) Calculez (théoriquement) ψ.

c) Trouvez un estimateur par Monte–Carlo de ψ.

d) Implémentez le en `R` et comparer à la valeur théorique.

✎ ✎ ✎

Exercice 4 (Probabilités de dépassement d'une Normale)**.**
Soit $Z \sim N(0,1)$. Nous sommes intéresser à évaluer la probabilité $\psi = \Pr(Z > 4.5)$.

a) A l'aide de `R` calculez cette probabilité. *?pnorm*

b) Trouvez un estimateur basique pour ψ et implémentez le en `R`.

c) Soit $Y = 4.5 + E$ où $E \sim \text{Exp}(1)$. Déterminez la densité de probabilité g de Y et trouvez comment générer des réalisations de Y.

d) Trouvez un estimateur par échantillonnage préférentiel de ψ avec pour densité outil g.

e) Implémentez le en `R`.

f) Comparez les performances de vos deux estimateurs.

✎ ✎ ✎