Modélisation Stochastique L3 MATH
2014–2015 M. Ribatet

Lab 1

Exercice 1 (RANDU)**.**

a) Ecrivez une fonction nommée `cgen` générant des v.a. selon un générateur linéaire congruentiel. Utilisez votre fonction afin qu'il utilise l'algorithme `RANDU` et vérifiez les propriétés indésirables de ce dernier à l'aide du code suivant

```
> n <- 10^4
> u <- cgen(n + 2)
> library(rgl)
> plot3d(cbind(u[1:n], u[2:(n+1)], u[3:(n+2)]))
```

b) Écrivez une fonction utilisant l'algorithme de Box–Muller pour générer des $N(0,1)$. Le design de votre fonction sera de telle sorte que votre fonction prendra comme argument d'entrée un vecteur de réalisations i.i.d. d'une $U(0,1)$.

c) Comparez les sorties de l'algorithme de Box–Muller lorsque `RANDU` ou le générateur de `R`, i.e., `runif`, sont utilisés. Vous pourrez vous inspirer du code suivant...

```
> n <- 10^4
> u <- cgen(n-1)##car RANDU ajoute la graine
>
> Z.randu <- boxmuller(u)
> Z.runif <- boxmuller(runif(n))
>
>
> Z.randu.xhist <- hist(Z.randu[,1], plot=FALSE)
> Z.randu.yhist <- hist(Z.randu[,2], plot=FALSE)
> topZ.randu <- max(c(Z.randu.xhist$counts, Z.randu.yhist$counts))
>
> Z.runif.xhist <- hist(Z.runif[,1], plot=FALSE)
> Z.runif.yhist <- hist(Z.runif[,2], plot=FALSE)
> topZ.runif <- max(c(Z.runif.xhist$counts, Z.runif.yhist$counts))
>
> ## La suite du code est complexe mais fait un joli graphique ;-)
> nf <- layout(matrix(c(2,0,5,0,1,3,4,6),2,4,byrow=TRUE), c(3,1,3,1), c(1,3),
+              TRUE)
>
>
> par(mar=c(3,3,1,1))
> plot(Z.randu, xlim = c(-4, 4), ylim = c(-4,4))
> par(mar=c(0,3,1,1))
> barplot(Z.randu.xhist$counts, axes=FALSE, ylim=c(0, topZ.randu), space=0)
> par(mar=c(3,0,1,1))
> barplot(Z.randu.yhist$counts, axes=FALSE, xlim=c(0, topZ.randu), space=0,
```

```
+         horiz=TRUE)
> par(mar=c(3,3,1,1))
> plot(Z.runif, xlim = c(-4, 4), ylim = c(-4,4))
> par(mar=c(0,3,1,1))
> barplot(Z.runif.xhist$counts, axes=FALSE, ylim=c(0, topZ.runif), space=0)
> par(mar=c(3,0,1,1))
> barplot(Z.runif.yhist$counts, axes=FALSE, xlim=c(0, topZ.runif), space=0,
+         horiz=TRUE)
```

Exercice 2 (Asymptotique)**.**

a) Soit $U \sim U(0,1)$. Montrez que $\mathbb{E}(U) = 0.5$ et que $\mathrm{Var}(U) = 1/12$.
b) Une manière de simuler des v.a. $N(0,1)$ consiste à poser $Z = \sum_{i=1}^{N} U_i - 6$ avec $N = 12$ et $U_1, \ldots, U_N$ des v.a.i.i.d. selon une $U(0,1)$. Donnez une justification à cet algorithme et implémentez le en `R`. Quels sont les défauts de cet algorithme ?
c) Modifiez votre code afin qu'il fonctionne pour toute valeur de N et analysez sont comportement lorsque N augmente—par exemple avec les valeurs $N = 5, 20, 100$.

Exercice 3 (Inversion)**.**

a) Implémentez la méthode d'inversion afin de générer des v.a. selon une Bernoulli et une binomiale—cf. exercice 1, Feuille 1.
b) Implémentez la méthode d'inversion afin de générer des v.a. exponentielle.
c) Vérifiez que les deux premiers moments sont corrects pour ces générateurs.

Exercice 4 (Acceptation–Rejet)**.**
Le but de cet exercice est de générer des v.a. selon une $N(0,1)$ à l'aide de différents algorithmes basés sur le principe de l'acceptation–rejet.

a) Implémentez l'algorithme lorsque la densité outil est $g(x) = 1/\{\pi(1+x^2)\}$, $x \in \mathbb{R}$. Donnez son efficacité théorique et comparez la à sa version empirique.
b) Implémentez un algorithme générant des réalisations selon la loi `double exponentielle`, i.e., de densité $g(x) = \lambda \exp(-\lambda|x|)$, $x \in \mathbb{R}$.
Astuce : Vous devriez être tentés d'utiliser la fonction ***`rexp`*** *(aide* ***`?rexp`****)*
c) Implémentez l'algorithme lorsque la densité outil est une double exponentielle. Trouvez la valeur optimale pour λ et donnez l'efficacité théorique correspondante. Comparez la à l'efficacité empirique.

Exercice 5 (Performance)**.**
A l'aide de la fonction `system.time()` (aide `?system.time`) comparer la rapidité d'exécution de vos fonctions générant des v.a. de loi donnée à celle de `R`.

Profitez en pour essayer de modifier vos fonctions afin de voir si vous ne pouvez pas améliorer leurs performances.

Astuce : Faites appel à moi je pourrais vous donner quelques bons tuyaux ;-)