Modélisation Stochastique L3 MATH
2014–2015 M. Ribatet

Feuille 1

Exercice 1 (`RANDU`)**.**
Le générateur `RANDU` largement utilisé sur les ordinateurs IBM est un générateur congruentiel multiplicatif définit comme suit

$$X_{n+1} \equiv 65539 X_n \mod 2^{31}.$$

Serez vous capable de montrer pourquoi ce générateur n'est plus du tout utilisé—du moins je l'espère ! ! ! !

Astuce : $65539 = 2^{16} + 3 \dots$

Exercice 2 (Méthode d'inversion)**.**
Montrez comment on peut utiliser la méthode d'inversion afin de générer des variables aléatoires de Bernoulli. Soit $0 < p < 1$. Déterminez la loi de

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{\{U_i \leq p\}}, \qquad 1, \dots, U_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1).$$

✎ ✎ ✎

Exercice 3 (Loi géométrique)**.**

a) Si X suit une loi exponentielle de densité $\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, montrez que

$$\Pr(r - 1 \leq X \leq r) = e^{-\lambda(r-1)}(1 - e^{-\lambda}).$$

b) Si Y suit une loi géométrique de densité $\Pr(Y = r) = p(1-p)^{r-1}$, $r = 1, 2, \dots$, $0 < p < 1$, montrez que $Y \overset{D}{=} \lceil \log(U)/\log(1-p) \rceil$, où $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de x, and $\overset{D}{=}$ signifie "*a la même loi que*". Déduisez en un algorithme pour générer des variables aléatoires géométriques.

✎ ✎ ✎

Exercice 4 (Loi Beta)**.**
La densité Beta de paramètre 2 et 5 est $f(x) = 30x(1-x)^4$, $0 \leq x \leq 1$. Construisez un algorithme d'acceptation–rejet en utilisant la densité uniforme $U(0,1)$ comme loi instrumentale g et donnez son efficacité.

✎ ✎ ✎

Exercice 5 (Acceptation–Rejet (2))**.**
Soient f et g deux densités de probabilités telles que

$$f(x) \leq M g(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

où $M < \infty$ est une constante positive.

a) Montrez que $M \geq 1$.

b) Quelle est la loi de $X \mid U \leq f(X)/\{Mg(X)\}$, où $X \sim g$ et $U \sim U(0,1)$ avec X indépendante de U ?

c) Quel est le lien entre ce résultat et la méthode d'acceptation–rejet ?

d) Montrez que la probabilité d'acceptation d'une v.a. pour l'algorithme d'acceptation–rejet est M^{-1}.

e) Soient $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} g$ et $U_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, $i \geq 1$. Quelle est la loi de

$$T = \inf\{i \geq 1 \colon U_i \leq f(X_i)/\{Mg(X_i)\}\}?$$

Déduisez en le nombre moyen attendu de v.a. U_i générées pour obtenir une réalisation selon f.

✎ ✎ ✎

Exercice 6 (Ratio d'uniformes)**.**
Soit $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, une fonction positive intégrable. Posons

$$C_h = \{(u,v) \colon 0 \leq u \leq h(v/u)^{1/2}\}.$$

a) À l'aide du changement de variable $(u,v) \mapsto (u, x = v/u)$, montrez que C_h a une aire finie, et que lorsque (U,V) est uniformément distribué sur C_h, alors $X = V/U$ admet pour densité $h(x)/\int h(y)\mathrm{d}y$.

b) Supposons que $h(x)$ et $x^2 h(x)$ soient bornés et que

$$a = \sqrt{\sup\{h(x) \colon -\infty < x < \infty\}}, \quad b_+ = \sqrt{\sup\{x^2 h(x) \colon x \geq 0\}}, \quad b_- = -\sqrt{\sup\{x^2 h(x) \colon x \leq 0\}},$$

montrez que $C_h \subset [0,a] \times [b_-, b_+]$. En déduire une justification de l'algorithme suivant :

1 Répétez
— Générez $U_1, U_2 \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$;
— Posez $U = aU_1$, $V = b_- + (b_+ - b_-)U_2$;
jusqu'à ce que $(U,V) \in C_h$.
2 Retournez $X = V/U$.

c) Supposons que $h(x) = (1+x^2)^{-1}$ on $-\infty < x < \infty$, montrez que cet algorithme génère des variables aléatoires de Cauchy.

d) Supposons que $h(x) = e^{-x}$, $0 < x < \infty$, montrez que $a = 1$, $b_- = 0$, et $b_+ = 2/e$ et en déduire une version de l'algorithme.

e) Supposons que $h(x) = e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$, trouvez les valeurs de a, b_- et b_+, et montrez que X est acceptée si et seulement si $V^2 \leq -4U^2 \log U$. En déduire une version de l'algorithme.

✎ ✎ ✎