

---

# Probabilités et matchs de football

Mathieu Ribatet

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck  
Université de Montpellier



▷ 1. Les paris sportifs

---

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

---

3. Football

---

4. Application

---

# 1. Les paris sportifs

# Qu'est ce qu'un pari sportif ?

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un  
▷ pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon

les bookmakers

Pourquoi ça marge

(avec un grand  
nombre de paris)?

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

- Un pari sportif consiste à miser de l'argent sur la réalisation d'un événement sportif.

**Exemple 1.** Pour le match Saint-Etienne // Montpellier de ce week-end, je mise sur la victoire de Saint-Etienne.

# Qu'est ce qu'un pari sportif ?

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un  
▷ pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon

les bookmakers

Pourquoi ça marge

(avec un grand  
nombre de paris)?

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

## 4. Application

- Un pari sportif consiste à miser de l'argent sur la réalisation d'un événement sportif.

**Exemple 1.** Pour le match Saint-Etienne // Montpellier de ce week-end, je mise sur la victoire de Saint-Etienne.

- A chaque pari est associée une cote qui permet de déterminer à l'avance l'argent gagné si le pari s'avère bon.

# Qu'est que la cote ?

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

▷ Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application

- Plusieurs conventions existent mais nous allons nous focaliser sur les **cotes européennes**.

# Qu'est que la cote ?

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

▷ Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application

- Plusieurs conventions existent mais nous allons nous focaliser sur les **cotes européennes**.
- Les cotes européennes sont définies par

$$\text{Gain} = \text{Mise} \times \text{Cote},$$

et la cote est donc **supérieure à 1**.

# Qu'est que la cote ?

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif?

▷ Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application

- Plusieurs conventions existent mais nous allons nous focaliser sur les **cotes européennes**.
- Les cotes européennes sont définies par

$$\text{Gain} = \text{Mise} \times \text{Cote},$$

et la cote est donc **supérieure à 1**.

**Exemple 2.** Je mise 10 euros sur la victoire de Saint-Etienne à une cote de 1,90. Si mon pari est bon, je recevrai alors

$$10 \times 1,90 = 19 \text{ euros (incluant ma mise de départ).}$$

# Qu'est que la cote ?

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

▷ Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application

- Plusieurs conventions existent mais nous allons nous focaliser sur les **cotes européennes**.
- Les cotes européennes sont définies par

$$\text{Gain} = \text{Mise} \times \text{Cote},$$

et la cote est donc **supérieure à 1**.

**Exemple 2.** Je mise 10 euros sur la victoire de Saint-Etienne à une cote de 1,90. Si mon pari est bon, je recevrai alors

$$10 \times 1,90 = 19 \text{ euros (incluant ma mise de départ).}$$

- ☞ Plus la cote est **grande**, plus le gain sera **important** (mais le risque également) ;
- ☞ Plus la cote est **proche de 1**, plus le gain sera **faible** (et le risque également).

# Cotes et probabilités

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

▷ Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris) ?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application

- Dans un monde **parfait** on a

$$\text{Cote} = \frac{1}{\text{Pr}(\text{mon pari se réalise})}$$

- Ceci vérifie bien les propriétés énoncées précédemment puisque

pari sûr  $\Leftrightarrow$  proba. proche de 1  $\Leftrightarrow$  cote faible  $\Leftrightarrow$  petit gain  
pari risqué  $\Leftrightarrow$  proba. proche de 0  $\Leftrightarrow$  cote élevée  $\Leftrightarrow$  gros gain

# Cotes et probabilités

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif?

Qu'est que la cote ?

▷ Cotes et probabilités

Les probabilités selon les bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application

- Dans un monde **parfait** on a

$$\text{Cote} = \frac{1}{\text{Pr}(\text{mon pari se réalise})}$$

- Ceci vérifie bien les propriétés énoncées précédemment puisque

pari sûr  $\Leftrightarrow$  proba. proche de 1  $\Leftrightarrow$  cote faible  $\Leftrightarrow$  petit gain  
pari risqué  $\Leftrightarrow$  proba. proche de 0  $\Leftrightarrow$  cote élevée  $\Leftrightarrow$  gros gain

- Oui mais **le monde n'est pas parfait !!!**

# Les probabilités selon les bookmakers

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif?

Qu'est que la cote?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les

▷ bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application



**Figure 1:** Les cotes de PMU.fr pour 3 matchs de la 31ème journée de Ligue 1.

# Les probabilités selon les bookmakers

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les

▷ bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris) ?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application



**Figure 1:** Les cotes de PMU.fr pour 3 matchs de la 31ème journée de Ligue 1.

**Table 1:** Les "probabilités" associées aux cotes précédentes.

Match	1	N	2	Somme
PSG // Monaco	0,74	0,22	0,12	
Lyon // Nantes	0,61	0,29	0,17	
Marseille // Rennes	0,56	0,29	0,22	

# Les probabilités selon les bookmakers

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les

▷ bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris) ?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application



**Figure 1:** Les cotes de PMU.fr pour 3 matchs de la 31ème journée de Ligue 1.

**Table 1:** Les "probabilités" associées aux cotes précédentes.

Match	1	N	2	Somme
PSG // Monaco	0,74	0,22	0,12	1,08
Lyon // Nantes	0,61	0,29	0,17	1,07
Marseille // Rennes	0,56	0,29	0,22	1,07

# Les probabilités selon les bookmakers

## 1. Les paris sportifs

Qu'est ce qu'un pari sportif ?

Qu'est que la cote ?

Cotes et probabilités

Les probabilités selon les

▷ bookmakers

Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris) ?

2. Modélisation stochastique

3. Football

4. Application



**Figure 1:** Les cotes de PMU.fr pour 3 matchs de la 31ème journée de Ligue 1.

**Table 1:** Les "probabilités" associées aux cotes précédentes.

Match	1	N	2	Somme
PSG // Monaco	0,74	0,22	0,12	<b>1,08</b>
Lyon // Nantes	0,61	0,29	0,17	<b>1,07</b>
Marseille // Rennes	0,56	0,29	0,22	<b>1,07</b>

👉 Les bookmakers prennent leurs marges !!!

## Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

---

- Supposons que je paris 1 euro sur les trois paris possibles du match PSG // Monaco. J'ai donc misé au total 3 euros.

## Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

- Supposons que je paris 1 euro sur les trois paris possibles du match PSG // Monaco. J'ai donc misé au total 3 euros.
- A l'issue du match, trois cas sont alors possibles :

Résultat du match	Cote	Gain	Proba.	Proba. × Gain
1 : PSG gagne	1,16	$-3 + 1,36 = -1,64$	0,69	-1,13
N : Match nul	7,00	$-3 + 4,60 = 1,60$	0,20	0,32
2 : Monaco gagne	17,00	$-3 + 8,50 = 5,50$	0,11	0,60
Total			1	-0,20

## Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

- Supposons que je paris 1 euro sur les trois paris possibles du match PSG // Monaco. J'ai donc misé au total 3 euros.
- A l'issue du match, trois cas sont alors possibles :

Résultat du match	Cote	Gain	Proba.	Proba. × Gain
1 : PSG gagne	1,16	$-3 + 1,36 = -1,64$	0,69	-1,13
N : Match nul	7,00	$-3 + 4,60 = 1,60$	0,20	0,32
2 : Monaco gagne	17,00	$-3 + 8,50 = 5,50$	0,11	0,60
Total			1	-0,20

- En fait la formule du gain moyen est simple (sous hypothèse)

$$\text{Gain moyen} = -3 + \sum \text{cotes} \times \text{proba.} = -3 + 3 \times \frac{1}{\text{marge}} = 3 \left( \frac{1}{\text{marge}} - 1 \right) < 0.$$

## Pourquoi ça marge (avec un grand nombre de paris)?

- Supposons que je paris 1 euro sur les trois paris possibles du match PSG // Monaco. J'ai donc misé au total 3 euros.
- A l'issue du match, trois cas sont alors possibles :

Résultat du match	Cote	Gain	Proba.	Proba. × Gain
1 : PSG gagne	1,16	$-3 + 1,36 = -1,64$	0,69	-1,13
N : Match nul	7,00	$-3 + 4,60 = 1,60$	0,20	0,32
2 : Monaco gagne	17,00	$-3 + 8,50 = 5,50$	0,11	0,60
Total			1	-0,20

- En fait la formule du gain moyen est simple (sous hypothèse)

$$\text{Gain moyen} = -3 + \sum \text{cotes} \times \text{proba.} = -3 + 3 \times \frac{1}{\text{marge}} = 3 \left( \frac{1}{\text{marge}} - 1 \right) < 0.$$

- 👉 Ici le PMU gagne en moyenne 6 centimes / euro misé.
- 👉 Journée type de L1 : 5 millions d'euros engagés  $\Rightarrow$  300 000 euros...

1. Les paris sportifs

▷ 2. Modélisation  
stochastique

Les statistiques

Exemples

Principe générique

3. Football

4. Application

## 2. Modélisation stochastique

# Les statistiques

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

▷ Les statistiques

Exemples

Principe générique

3. Football

4. Application

- Pour beaucoup de gens, la statistique se résume à :
  - calculer des moyennes, médianes ;
  - faire de beaux graphiques (histogramme).
- Rien de bien passionnant donc !

# Les statistiques

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

▷ Les statistiques

Exemples

Principe générique

3. Football

4. Application

- Pour beaucoup de gens, la statistique se résume à :
  - calculer des moyennes, médianes ;
  - faire de beaux graphiques (histogramme).
- Rien de bien passionnant donc !
- C'est en fait très réducteur et ignore tout un pan de la statistique qu'est la

modélisation stochastique

- Voyons quelques exemples.

# Exemples

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

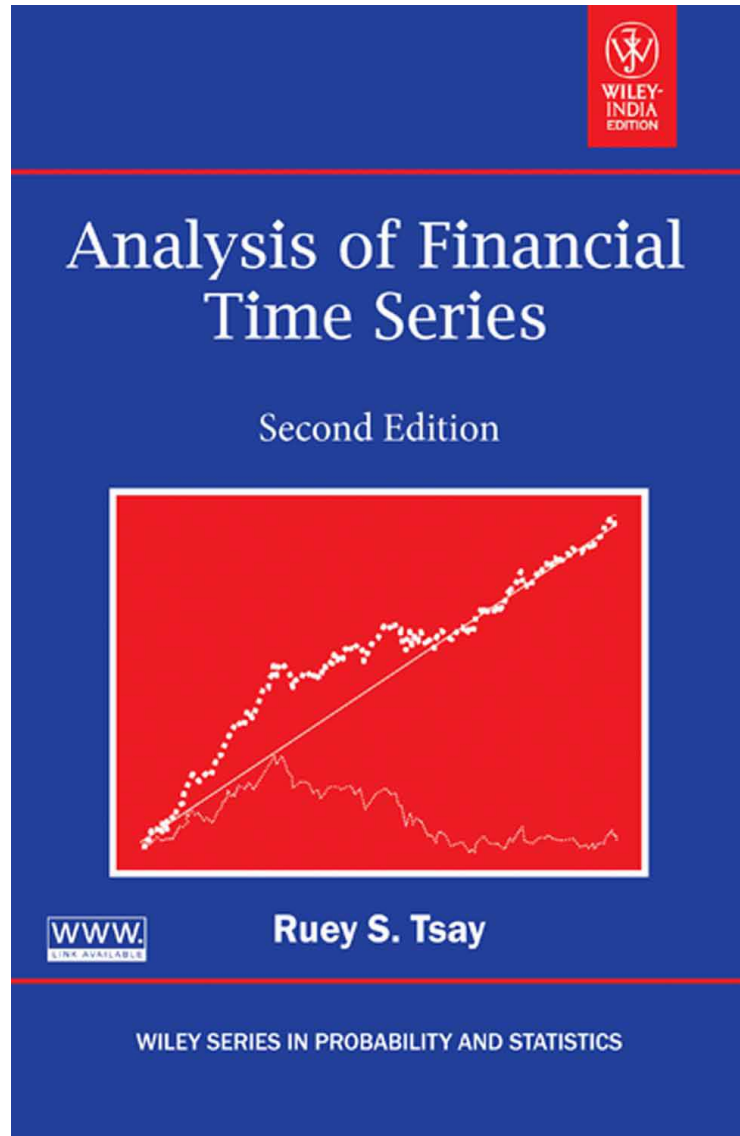
Les statistiques

▷ Exemples

Principe générique

3. Football

4. Application



- Prédiction d'une série temporelle comme :
  - la température à Montpellier pour les prochains jours ;
  - le cours d'un actif financier...

# Exemples

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

Les statistiques

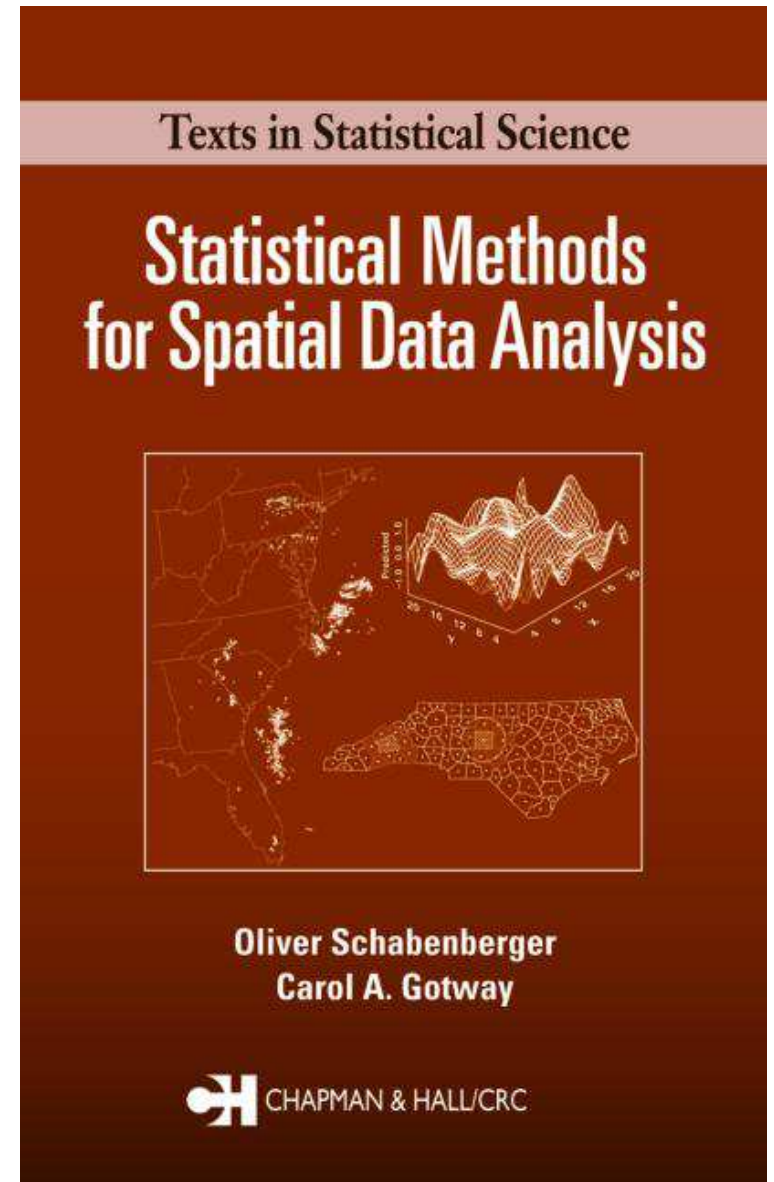
▷ Exemples

Principe générique

3. Football

4. Application

- Prédiction d'une quantité d'intérêt sur une région d'étude comme :
  - la concentration d'un polluant dans le sol ;
  - le nombre de personnes atteintes de la grippe...



# Exemples

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

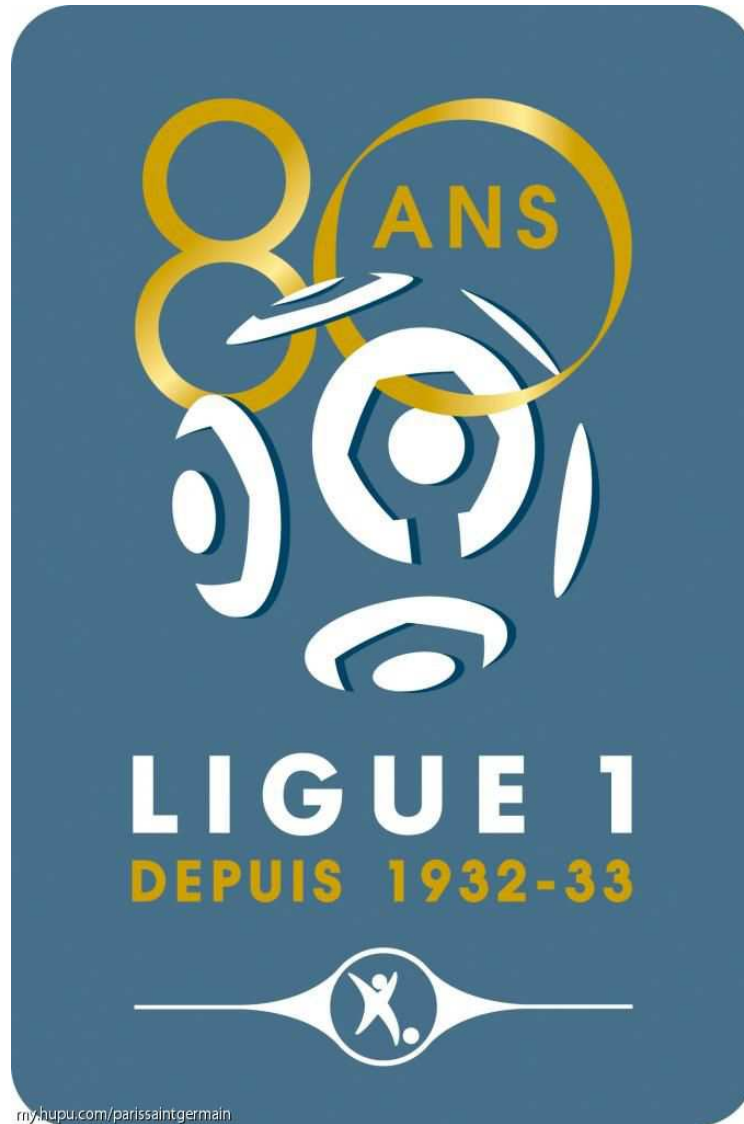
Les statistiques

▷ Exemples

Principe générique

3. Football

4. Application



□ Prévisions sportives  
comme :

- l'issue des matchs de  
Ligue 1 !!!

# Principe générique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

Les statistiques

Exemples

▷ Principe  
générique

3. Football

4. Application

- La modélisation statistique repose (bien souvent) sur un **modèle statistique** noté

$$\{f(y; \theta) : y \in \mathcal{Y}, \theta \in \Theta\},$$

où

- $y$  correspondra à des observations (e.g., nombre de buts) ;
- $\theta$  est un ensemble de **paramètres** à déterminer à l'aide des données disponibles—on parle alors d'estimation.

👉 Avoir un bon modèle statistique et les valeurs adéquates des paramètres est le saint graal du statisticien !

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

▷ 3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

## 3. Football

# Objectifs

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### ▷ Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la

loi de Poisson

Formalisation

mathématique

Parcimonie

## 4. Application

- Nous voulons avoir une approche statistique pour établir des paris sur les matchs de Ligue 1.
- On va se concentrer sur les paris de type **1N2** pour lesquels 3 options sont possibles :
  - 1** Victoire de l'équipe qui joue à domicile ;
  - N** Match nul ;
  - 2** Victoire de l'équipe qui joue à l'extérieur.
- On aimerait également avoir la possibilité de parier sur le **score exact**—si nous nous sentons téméraires.

# Objectifs

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### ▷ Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la

loi de Poisson

Formalisation

mathématique

Parcimonie

## 4. Application

- Nous voulons avoir une approche statistique pour établir des paris sur les matchs de Ligue 1.
- On va se concentrer sur les paris de type **1N2** pour lesquels 3 options sont possibles :
  - 1** Victoire de l'équipe qui joue à domicile ;
  - N** Match nul ;
  - 2** Victoire de l'équipe qui joue à l'extérieur.
- On aimerait également avoir la possibilité de parier sur le **score exact**—si nous nous sentons téméraires.

 **Avoir recours aux approches probabilistes est complètement naturel puisque l'issue d'un match reste incertaine avant que ce dernier ne soit terminé...**

# Où est l'aléa dans un match de foot ?

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### Objectifs

- Représenter le
- ▷ hasard

### Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la

### loi de Poisson

### Formalisation

### mathématique

### Parcimonie

## 4. Application

- Il n'y pas de réponse universelle à cette question :- (
- Cela dépend du degré de sophistication mis en oeuvre.
- Cela dit une approche naturelle est de considérer que l'aléa porte sur **le nombre de buts** inscrits par l'équipe A (domicile) et l'équipe B (extérieure).

# Où est l'aléa dans un match de foot ?

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### Objectifs

- Représenter le
- ▷ hasard

### Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la loi de Poisson

### Formalisation mathématique

### Parcimonie

## 4. Application

- Il n'y a pas de réponse universelle à cette question :- (
- Cela dépend du degré de sophistication mis en oeuvre.
- Cela dit une approche naturelle est de considérer que l'aléa porte sur **le nombre de buts** inscrits par l'équipe A (domicile) et l'équipe B (extérieure).
- Notons donc pour le match A reçoit B

$N_A =$  Nombre de buts de l'équipe A

$N_B =$  Nombre de buts de l'équipe B

- $N_A$  et  $N_B$  sont ce qu'on appelle des **variables aléatoires**.
- Ici la modélisation stochastique consiste donc à "trouver" le modèle statistique

$$\{f(y; \theta) : y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \theta \in \Theta\}, \quad (\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}),$$

pour le couple  $(N_A, N_B)$ .

# Petite remarque en passant

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le  
▷ hasard

Loi de Poisson  
Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson  
Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

- Si notre intérêt porte seulement sur les paris de type 1N2, on pourrait alors chercher un modèle statistique

$$\{f(y; \theta) : y \in \mathbb{Z}, \theta \in \Theta\}, \quad (\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}),$$

pour l'entier  $D = N_A - N_B$ .

- En effet, on a clairement

$$\text{Victoire de } A \iff N_A > N_B \iff D > 0$$

$$\text{Match nul} \iff N_A = N_B \iff D = 0$$

$$\text{Victoire de } B \iff N_A < N_B \iff D < 0$$

# Petite remarque en passant

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le  
▷ hasard

Loi de Poisson  
Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson  
Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

- Si notre intérêt porte seulement sur les paris de type 1N2, on pourrait alors chercher un modèle statistique

$$\{f(y; \theta) : y \in \mathbb{Z}, \theta \in \Theta\}, \quad (\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}),$$

pour l'entier  $D = N_A - N_B$ .

- En effet, on a clairement

$$\text{Victoire de } A \iff N_A > N_B \iff D > 0$$

$$\text{Match nul} \iff N_A = N_B \iff D = 0$$

$$\text{Victoire de } B \iff N_A < N_B \iff D < 0$$



*La remarque de* .

Par contre, on ne pourra plus prédire le score exact...

# Loi de Poisson

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

▷ Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

## **Théorème.**

*Soit  $X(n, p) \sim \text{Bin}(n, p)$ —nombre de succès parmi  $n$  tentatives indépendantes chacune de probabilité de réussite  $p$ . Si  $np \rightarrow \lambda < \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors*

$$X(n, p) \longrightarrow \text{Poisson}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

▷ Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

## Théorème.

Soit  $X(n, p) \sim \text{Bin}(n, p)$ —nombre de succès parmi  $n$  tentatives indépendantes chacune de probabilité de réussite  $p$ . Si  $np \rightarrow \lambda < \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$X(n, p) \longrightarrow \text{Poisson}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$



*La remarque de* .

Si l'équipe  $A$ , lors du match contre l'équipe  $B$ , a un **nombre assez grand d'occasions de but**

# Loi de Poisson

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

▷ Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

## Théorème.

Soit  $X(n, p) \sim \text{Bin}(n, p)$ —nombre de succès parmi  $n$  tentatives indépendantes chacune de probabilité de réussite  $p$ . Si  $np \rightarrow \lambda < \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$X(n, p) \longrightarrow \text{Poisson}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$



*La remarque de* .

Si l'équipe  $A$ , lors du match contre l'équipe  $B$ , a un **nombre assez grand d'occasions de but** mais que **seulement un petit nombre d'entre elles se concrétisent**,

# Loi de Poisson

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

▷ Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

## Théorème.

Soit  $X(n, p) \sim \text{Bin}(n, p)$ —nombre de succès parmi  $n$  tentatives indépendantes chacune de probabilité de réussite  $p$ . Si  $np \rightarrow \lambda < \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$X(n, p) \longrightarrow \text{Poisson}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$



*La remarque de* .

Si l'équipe  $A$ , lors du match contre l'équipe  $B$ , a un **nombre assez grand d'occasions de but** mais que **seulement un petit nombre d'entre elles se concrétisent**, alors le nombre de buts de l'équipe  $A$  devrait **suivre une loi de Poisson !!!** (et idem pour l'équipe  $B$ )

# Loi de Poisson

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

▷ Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

## Théorème.

Soit  $X(n, p) \sim \text{Bin}(n, p)$ —nombre de succès parmi  $n$  tentatives indépendantes chacune de probabilité de réussite  $p$ . Si  $np \rightarrow \lambda < \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$X(n, p) \longrightarrow \text{Poisson}(\lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$

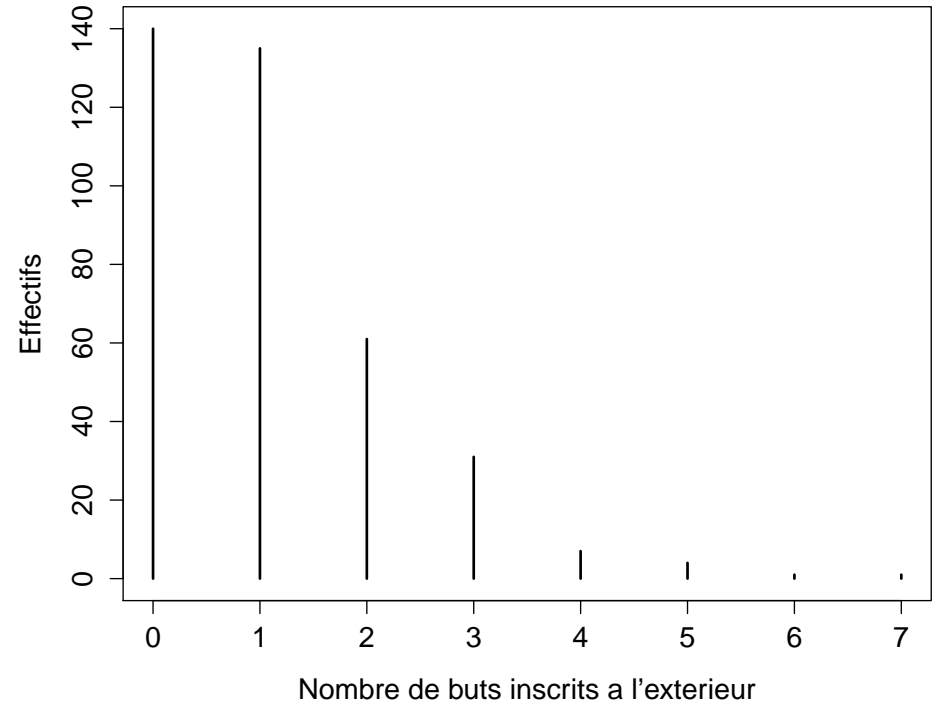
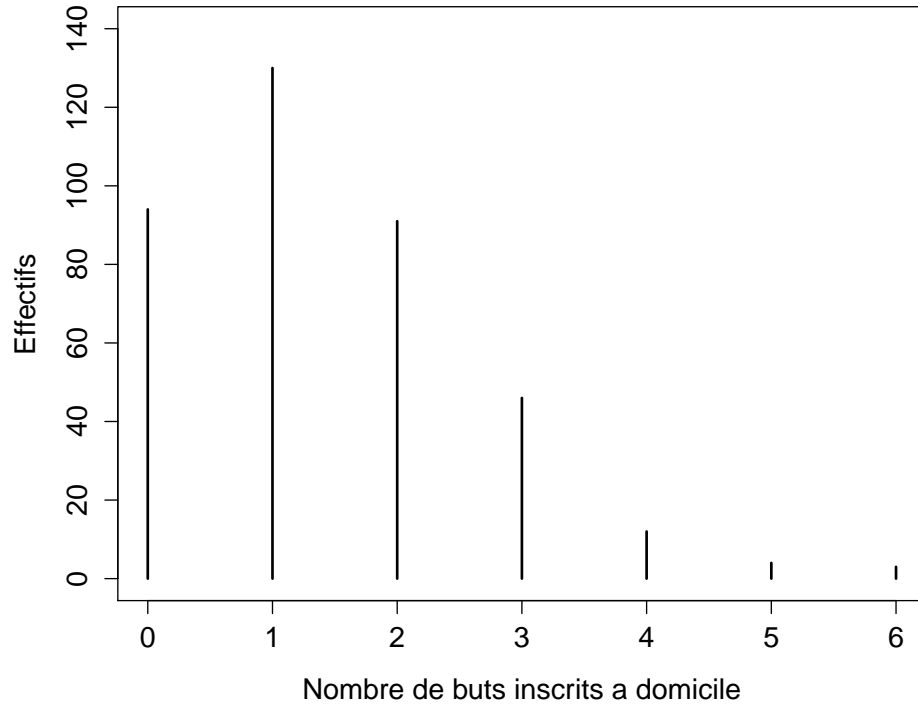


La remarque de .

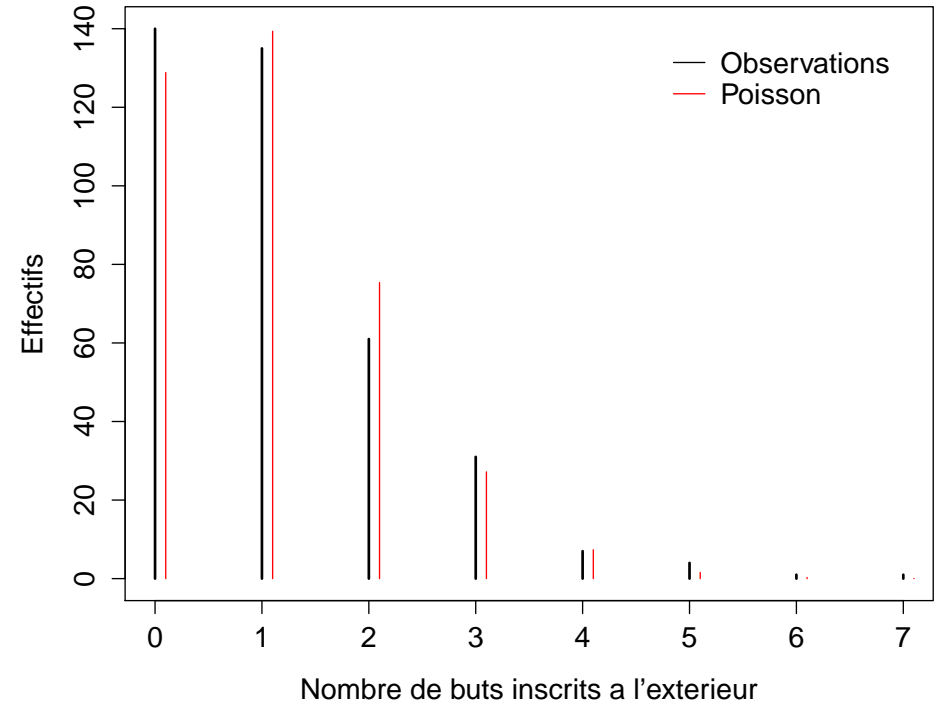
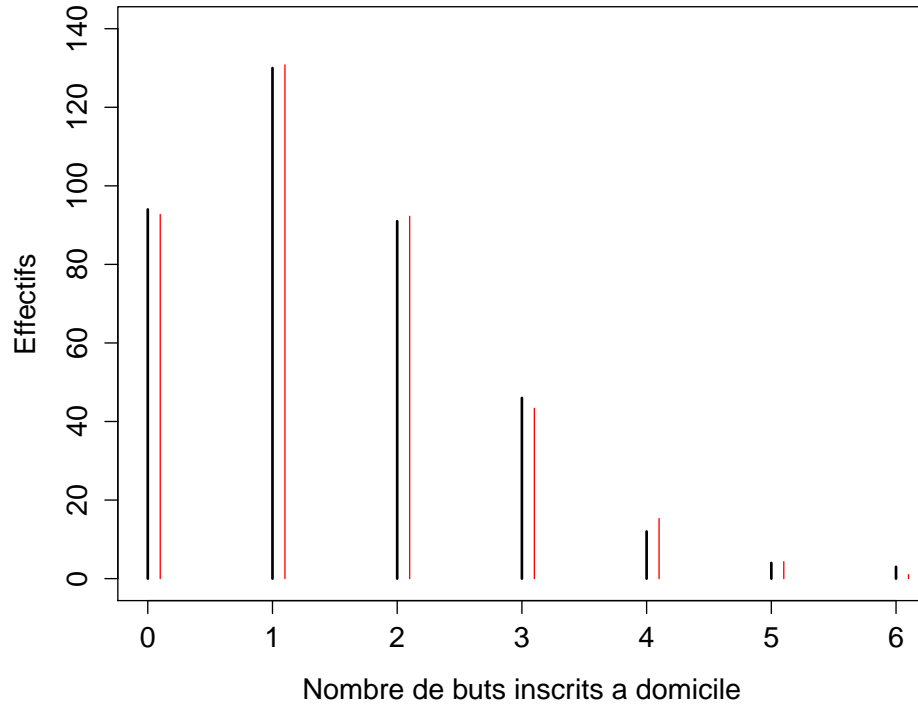
Si l'équipe  $A$ , lors du match contre l'équipe  $B$ , a un **nombre assez grand d'occasions de but** mais que **seulement un petit nombre d'entre elles se concrétisent**, alors le nombre de buts de l'équipe  $A$  devrait **suivre une loi de Poisson !!!** (et idem pour l'équipe  $B$ )

☞ Vérifions ça sur des données...

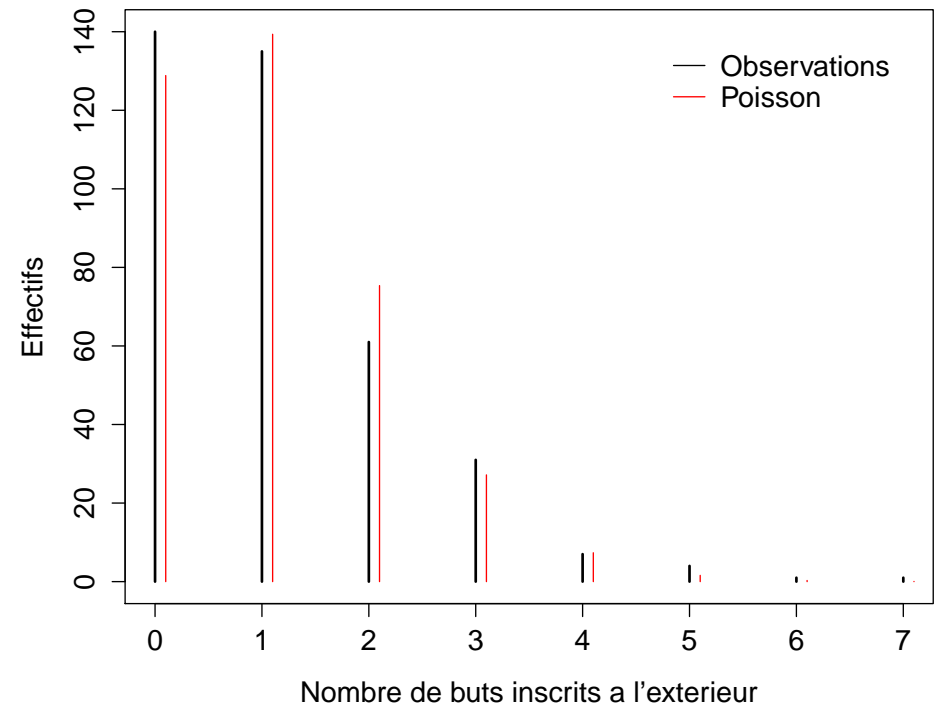
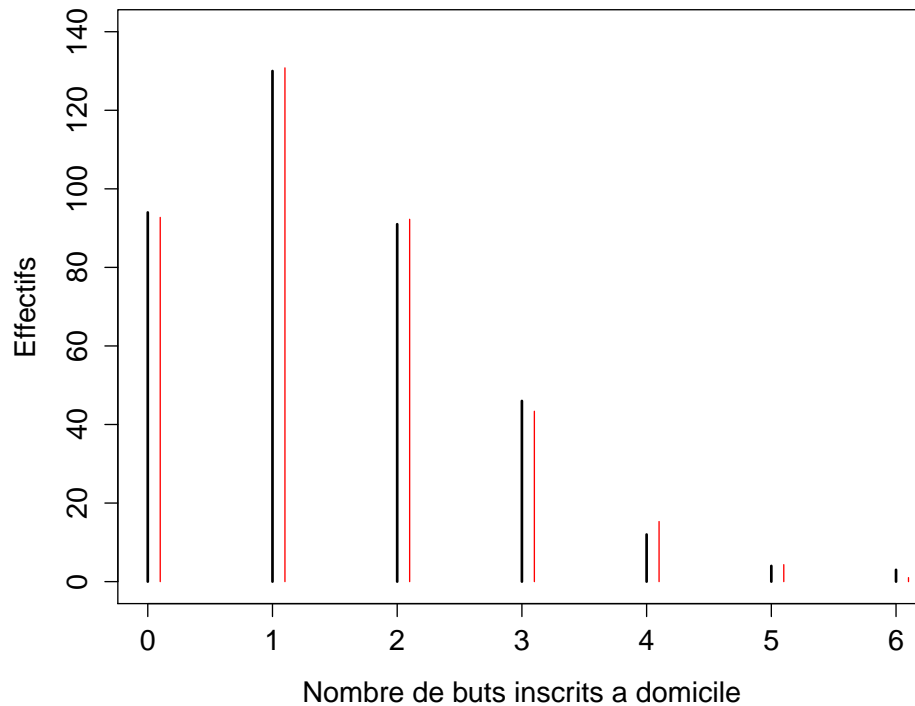
# Buts inscrits lors de la saison 2014–2015 de Ligue 1



# Buts inscrits lors de la saison 2014–2015 de Ligue 1



# Buts inscrits lors de la saison 2014–2015 de Ligue 1



*La remarque de* .

- Les théorèmes c'est pas juste pour embêter les étudiants...
- Ça a souvent une interprétation concrète—surtout en maths appli !!!

# Le paramètre $\lambda$ de la loi de Poisson

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

▶ Le paramètre  $\lambda$  de  
la loi de Poisson

Formalisation  
mathématique

Parcimonie

4. Application

- La loi de Poisson possède un unique paramètre (souvent) noté  $\lambda > 0$ .
- Son interprétation est simple :
  - plus  $\lambda$  est grand, plus l'équipe marquera de buts en moyenne ;
  - plus  $\lambda$  est proche de 0, moins elle marquera de buts en moyenne.

# Le paramètre $\lambda$ de la loi de Poisson

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

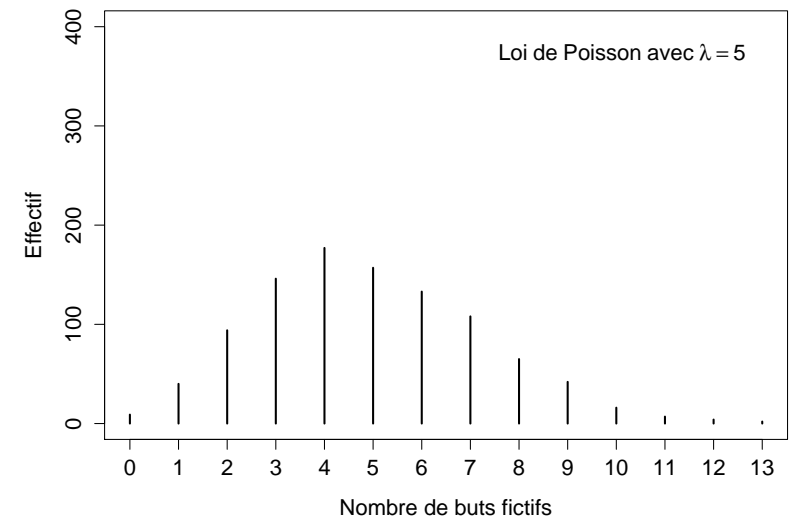
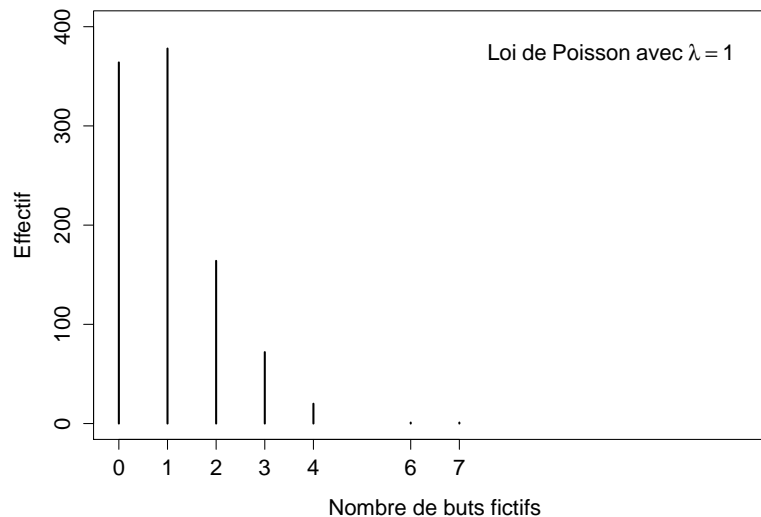
▷ Le paramètre  $\lambda$  de la loi de Poisson

Formalisation mathématique

Parcimonie

## 4. Application

- La loi de Poisson possède un unique paramètre (souvent) noté  $\lambda > 0$ .
- Son interprétation est simple :
  - plus  $\lambda$  est grand, plus l'équipe marquera de buts en moyenne ;
  - plus  $\lambda$  est proche de 0, moins elle marquera de buts en moyenne.



# Le paramètre $\lambda$ de la loi de Poisson

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de

▷ la loi de Poisson

Formalisation

mathématique

Parcimonie

4. Application

- La loi de Poisson possède un unique paramètre (souvent) noté  $\lambda > 0$ .
- Son interprétation est simple :
  - plus  $\lambda$  est grand, plus l'équipe marquera de buts en moyenne ;
  - plus  $\lambda$  est proche de 0, moins elle marquera de buts en moyenne.



*La remarque de* .

- Donc typiquement  $\lambda_{\text{PSG}} > \lambda_{\text{Troyes}}$  non ?
- Mais peut être aussi que  $\lambda_{\text{domicile}} > \lambda_{\text{exterieur}}$  ?

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .
- On pourrait considérer le **modèle** suivant

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B),$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \exp(\mu + \text{domicile}_A + \text{attaque}_A - \text{défense}_B), \\ \lambda_B &= \exp(\mu + \text{domicile}_B + \text{attaque}_B - \text{défense}_A). \end{aligned}$$

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .
- On pourrait considérer le **modèle** suivant

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B),$$

où

$$\lambda_A = \exp(\mu + \text{domicile}_A + \text{attaque}_A - \text{défense}_B),$$
$$\lambda_B = \exp(\mu + \text{défense}_B - \text{attaque}_A).$$

👉  $\mu$  est lié au nombre attendu de buts marqués par une équipe quelconque de Ligue 1

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .
- On pourrait considérer le **modèle** suivant

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B),$$

où

$$\lambda_A = \exp(\mu + \text{domicile}_A + \text{attaque}_A - \text{défense}_B),$$
$$\lambda_B = \exp(\mu + \text{attaque}_B - \text{défense}_A).$$

👉 **domicile<sub>A</sub>** est lié au “surplus offensif” de l'équipe  $A$  lorsqu'elle joue à domicile

# Formalisation mathématique

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

## 4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .
- On pourrait considérer le **modèle** suivant

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B),$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \exp(\mu + \text{domicile}_A + \text{attaque}_A - \text{défense}_B), \\ \lambda_B &= \exp(\mu + \text{domicile}_B + \text{attaque}_B - \text{défense}_A). \end{aligned}$$

👉  $\text{attaque}_A$  est lié à la performance offensive de l'équipe  $A$

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .
- On pourrait considérer le **modèle** suivant

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B),$$

où

$$\lambda_A = \exp(\mu + \text{domicile}_A + \text{attaque}_A - \text{défense}_B),$$
$$\lambda_B = \exp(\mu + \text{domicile}_B + \text{attaque}_B - \text{défense}_A).$$

👉  $\text{defense}_B$  est lié à la performance défensive de l'équipe  $B$

# Formalisation mathématique

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la  
loi de Poisson

Formalisation  
▷ mathématique

Parcimonie

4. Application

- Il s'agit maintenant de traduire nos intuitions en maths... C'est le travail d'un **modélisateur** !
- Considérons le match de  $A$  recevant  $B$ .
- On pourrait considérer le **modèle** suivant

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B),$$

où

$$\lambda_A = \exp(\mu + \text{domicile}_A + \text{attaque}_A - \text{défense}_B),$$
$$\lambda_B = \exp(\mu + \text{défense}_B - \text{attaque}_A).$$



*La remarque de*  .

On utilise une exponentielle pour que nos “ $\lambda$ ” soient toujours positifs.

# Parcimonie

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la

loi de Poisson

Formalisation

mathématique

▷ Parcimonie

## 4. Application

- Le modèle proposé possède trop de paramètres—Occam's razor.
- En effet on a en tout  $1 + 3 \times 20 = 61$  paramètres pour “seulement” 380 matchs !
- Soit environ 1 paramètre pour 6 observations : c'est trop !
- Une approche classique consiste à “**apprendre de ses pairs**”

# Parcimonie

## 1. Les paris sportifs

## 2. Modélisation stochastique

## 3. Football

### Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la

loi de Poisson

Formalisation

mathématique

▷ Parcimonie

## 4. Application

- Le modèle proposé possède trop de paramètres—Occam's razor.
- En effet on a en tout  $1 + 3 \times 20 = 61$  paramètres pour “seulement” 380 matchs !
- Soit environ 1 paramètre pour 6 observations : c'est trop !
- Une approche classique consiste à “**apprendre de ses pairs**”

$$\text{attaque}_A \sim N(0, 10)$$

# Parcimonie

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

Objectifs

Représenter le hasard

Loi de Poisson

Le paramètre  $\lambda$  de la

loi de Poisson

Formalisation

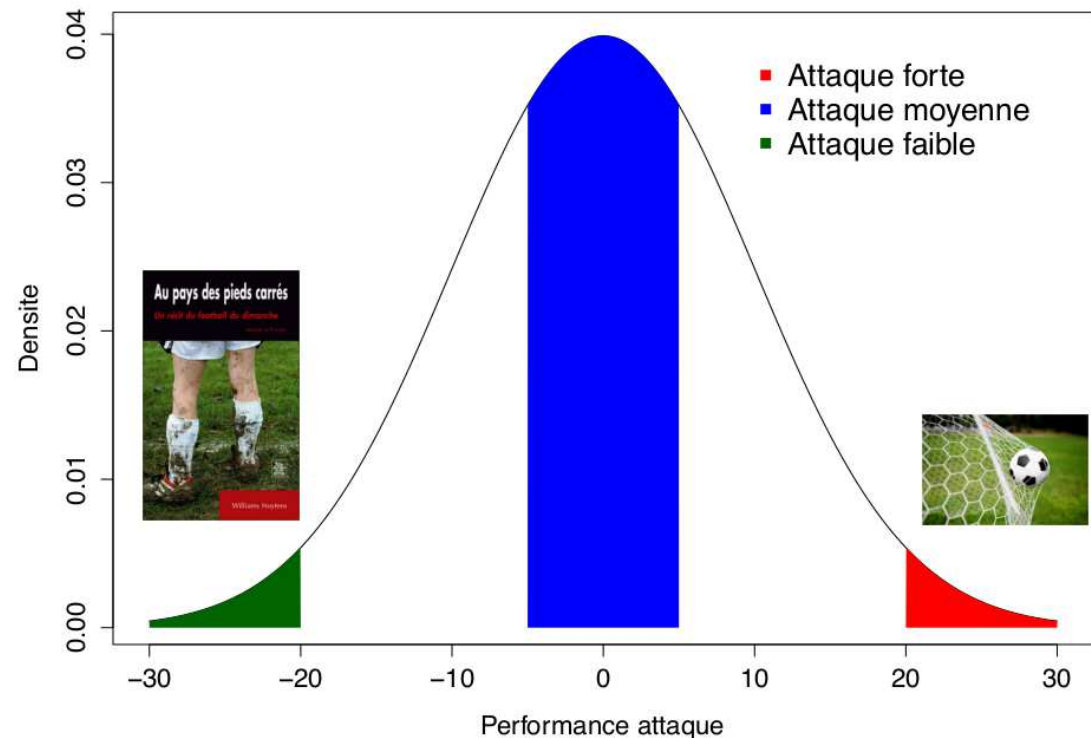
mathématique

▷ Parcimonie

4. Application

- Le modèle proposé possède trop de paramètres—Occam's razor.
- En effet on a en tout  $1 + 3 \times 20 = 61$  paramètres pour “seulement” 380 matchs !
- Soit environ 1 paramètre pour 6 observations : c'est trop !
- Une approche classique consiste à “**apprendre de ses pairs**”

$$\text{attaque}_A \sim N(0, 10)$$



**Résumons ce que nous avons fait :  $A$  reçoit  $B$**

---

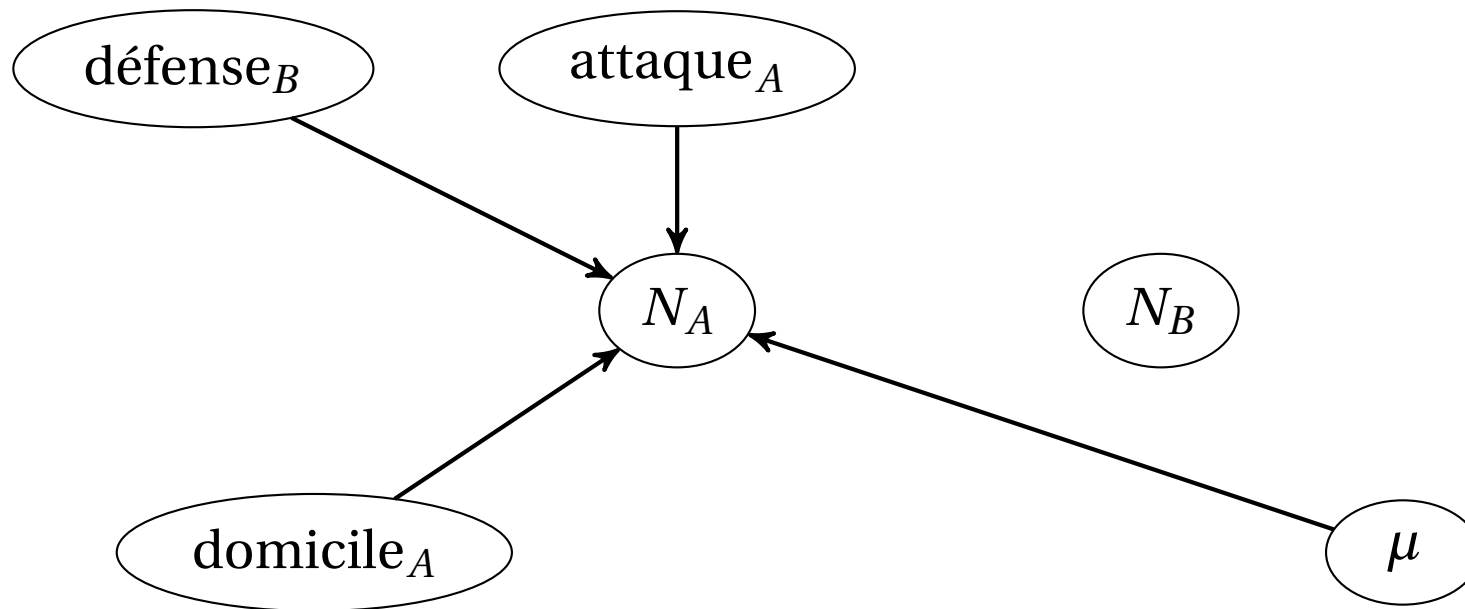
# Résumons ce que nous avons fait : $A$ reçoit $B$

---

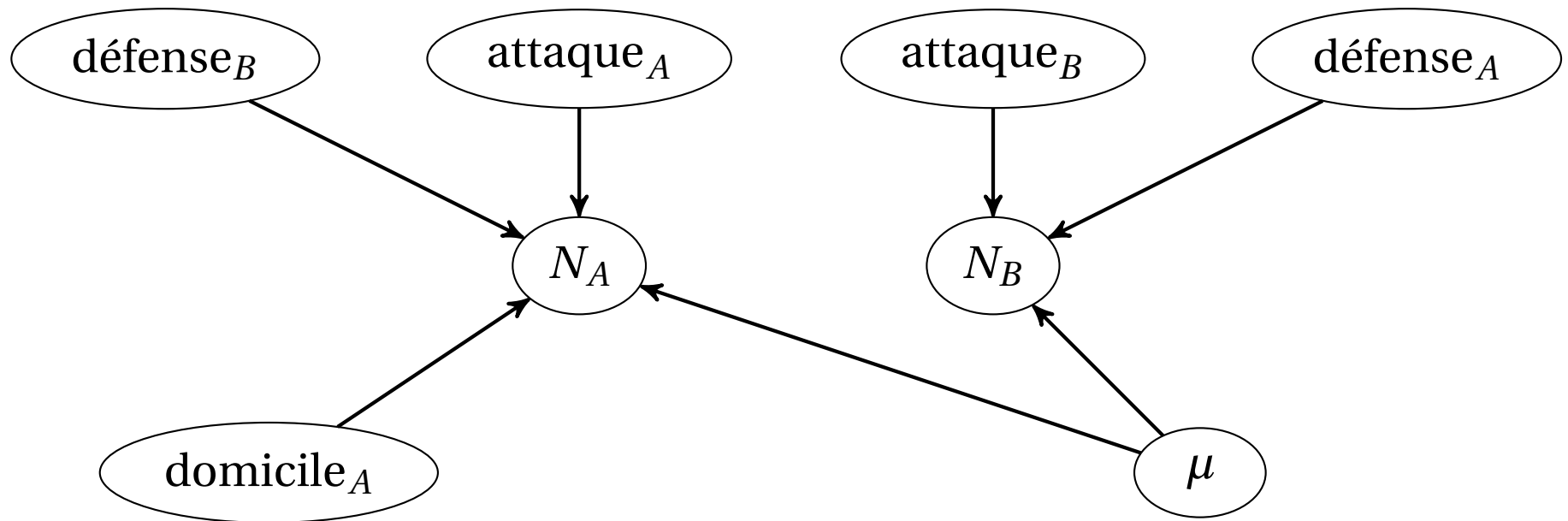
$N_A$

$N_B$

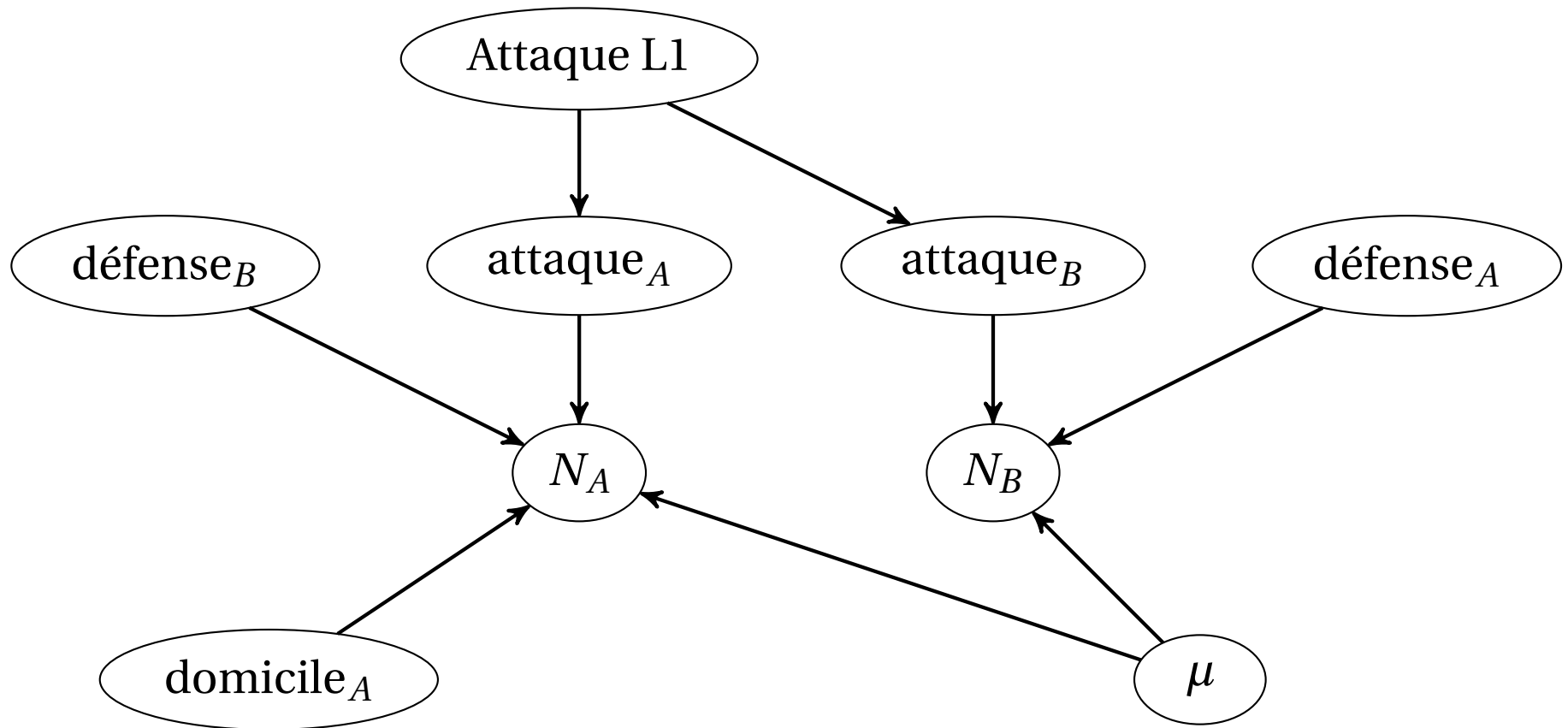
# Résumons ce que nous avons fait : $A$ reçoit $B$



## Résumons ce que nous avons fait : $A$ reçoit $B$

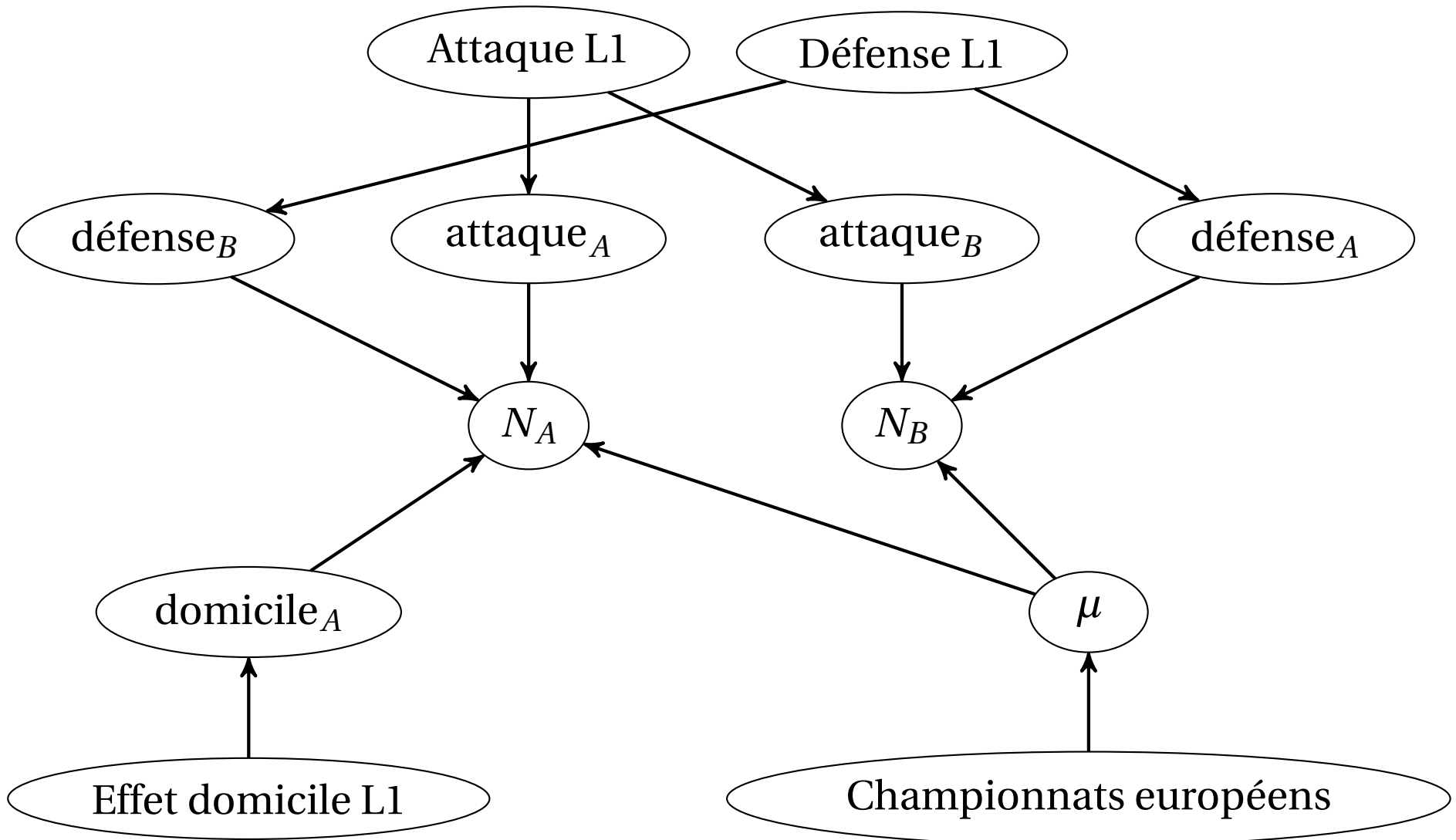


# Résumons ce que nous avons fait : $A$ reçoit $B$





# Résumons ce que nous avons fait : $A$ reçoit $B$



1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

▷ 4. Application

Les données

Résultats

Pronostics

# 4. Application

# Les données

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

▷ Les données

Résultats

Pronostics

Date	Domicile	Extérieur	But domicile	But extérieur
07/08/15	Lille	Paris SG	0	1
08/08/15	Bastia	Rennes	2	1
08/08/15	Marseille	Caen	0	1
08/08/15	Montpellier	Angers	0	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12/03/16	Toulouse	Bordeaux	4	0
13/03/16	Nantes	Angers	2	0
13/03/16	Troyes	Paris SG	0	9
13/03/16	Rennes	Lyon	2	2

# Les données

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

▷ Les données

Résultats

Pronostics

Date	Domicile	Extérieur	But domicile	But extérieur
07/08/15	Lille	Paris SG	0	1
08/08/15	Bastia	Rennes	2	1
08/08/15	Marseille	Caen	0	1
08/08/15	Montpellier	Angers	0	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12/03/16	Toulouse	Bordeaux	4	0
13/03/16	Nantes	Angers	2	0
13/03/16	Troyes	Paris SG	0	9
13/03/16	Rennes	Lyon	2	2

- A partir de ces données, nous sommes capable de déterminer des bonnes valeurs pour les paramètres—c'est **l'estimation**.

# Résultats

$\mu \approx -0.11 \implies \exp(-0,11) \approx 0,9$  buts / match

	Attaque	Défense	Domicile
Ajaccio GFCO	0,00	-0,24	-0,31
Angers	0,12	0,13	-0,33
Bastia	-0,54	0,10	0,66
Bordeaux	0,19	-0,30	-0,02
Caen	0,24	-0,19	-0,45
Guingamp	-0,45	-0,26	0,69
Lille	-0,95	0,50	0,63
Lorient	0,17	-0,18	0,03
Lyon	0,15	0,03	0,31
Marseille	0,22	0,26	-0,07
Monaco	0,26	0,08	-0,06
Montpellier	0,17	-0,10	-0,06
Nantes	-0,34	0,26	0,12
Nice	0,22	-0,03	0,02
Paris SG	0,79	1,06	0,14
Reims	-0,12	-0,16	0,15
Rennes	0,34	0,01	-0,62
St Etienne	0,04	0,00	0,17
Toulouse	-0,23	-0,40	0,09
Troyes	-0,29	-0,60	-1,11

# Résultats

$\mu \approx -0.11 \implies \exp(-0,11) \approx 0,9$  buts / match

	Attaque	Défense	Domicile
Ajaccio GFCO	0,00	-0,24	-0,31
Angers	0,12	0,13	-0,33
<b>Bastia</b>	<b>-0,54</b>	<b>0,10</b>	<b>0,66</b>
Bordeaux	0,19	-0,30	-0,02
Caen	0,24	-0,19	-0,45
Guingamp	-0,45	-0,26	0,69
Lille	-0,95	0,50	0,63
Lorient	0,17	-0,18	0,03
Lyon	0,15	0,03	0,31
Marseille	0,22	0,26	-0,07
Monaco	0,26	0,08	-0,06
<b>Montpellier</b>	<b>0,17</b>	<b>-0,10</b>	<b>-0,06</b>
Nantes	-0,34	0,26	0,12
Nice	0,22	-0,03	0,02
Paris SG	0,79	1,06	0,14
Reims	-0,12	-0,16	0,15
Rennes	0,34	0,01	-0,62
St Etienne	0,04	0,00	0,17
Toulouse	-0,23	-0,40	0,09
Troyes	-0,29	-0,60	-1,11



*La remarque de* .

☞ L'effet à domicile de Bastia est de 0,66, i.e., Bastia marque en moyenne  $\exp(0,66) \approx 1,93$  fois plus de buts à domicile.

☞ L'effet à domicile du MHSC est quasiment inexistant  $\implies$  supporters bougez vous !

# Les chiffres c'est bien, mais les graphiques...

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

Les données

▷ Résultats

Pronostics

# Les chiffres c'est bien, mais les graphiques...

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

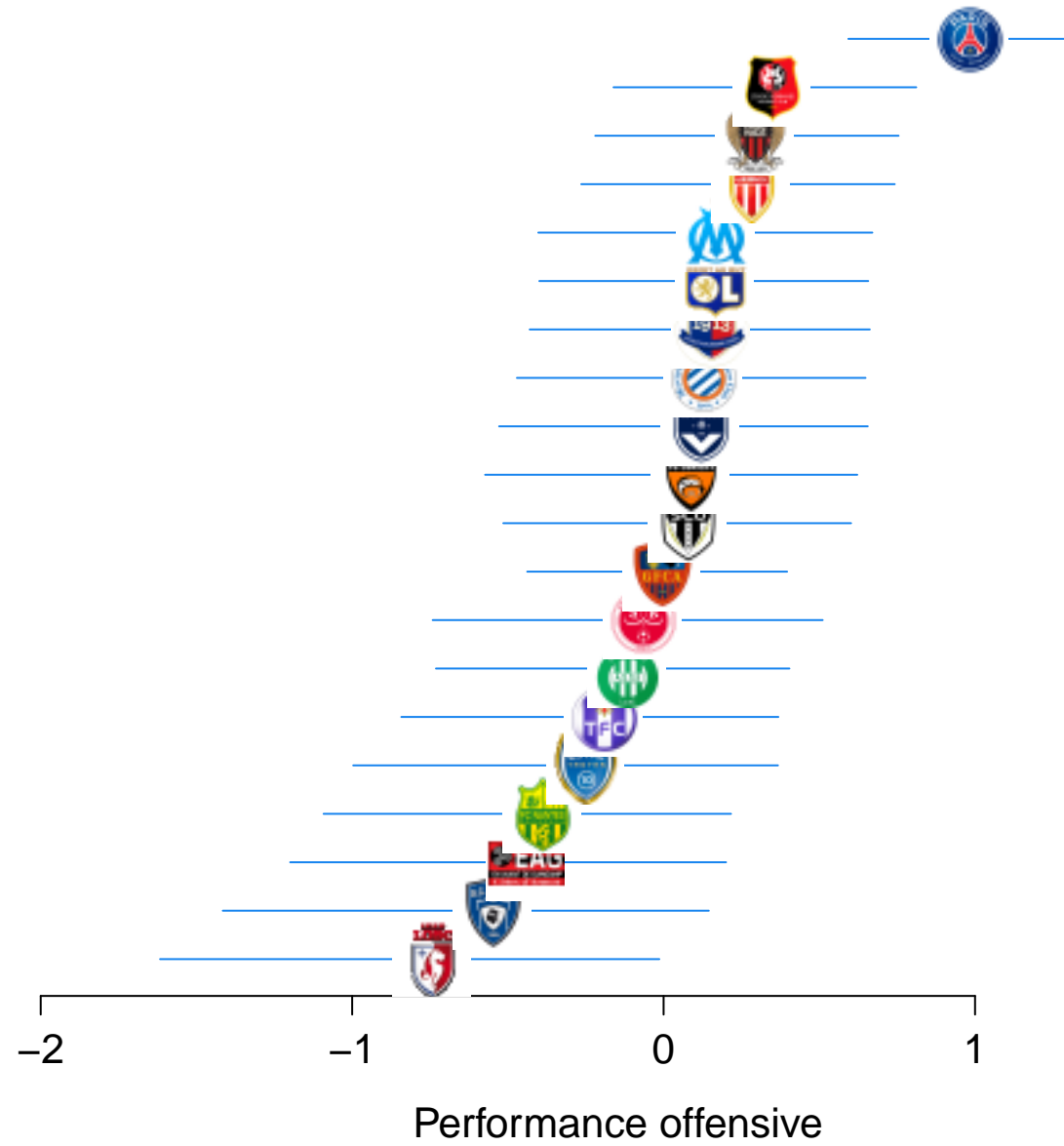
3. Football

4. Application

Les données

▷ Résultats

Pronostics





# Les chiffres c'est bien, mais les graphiques...

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

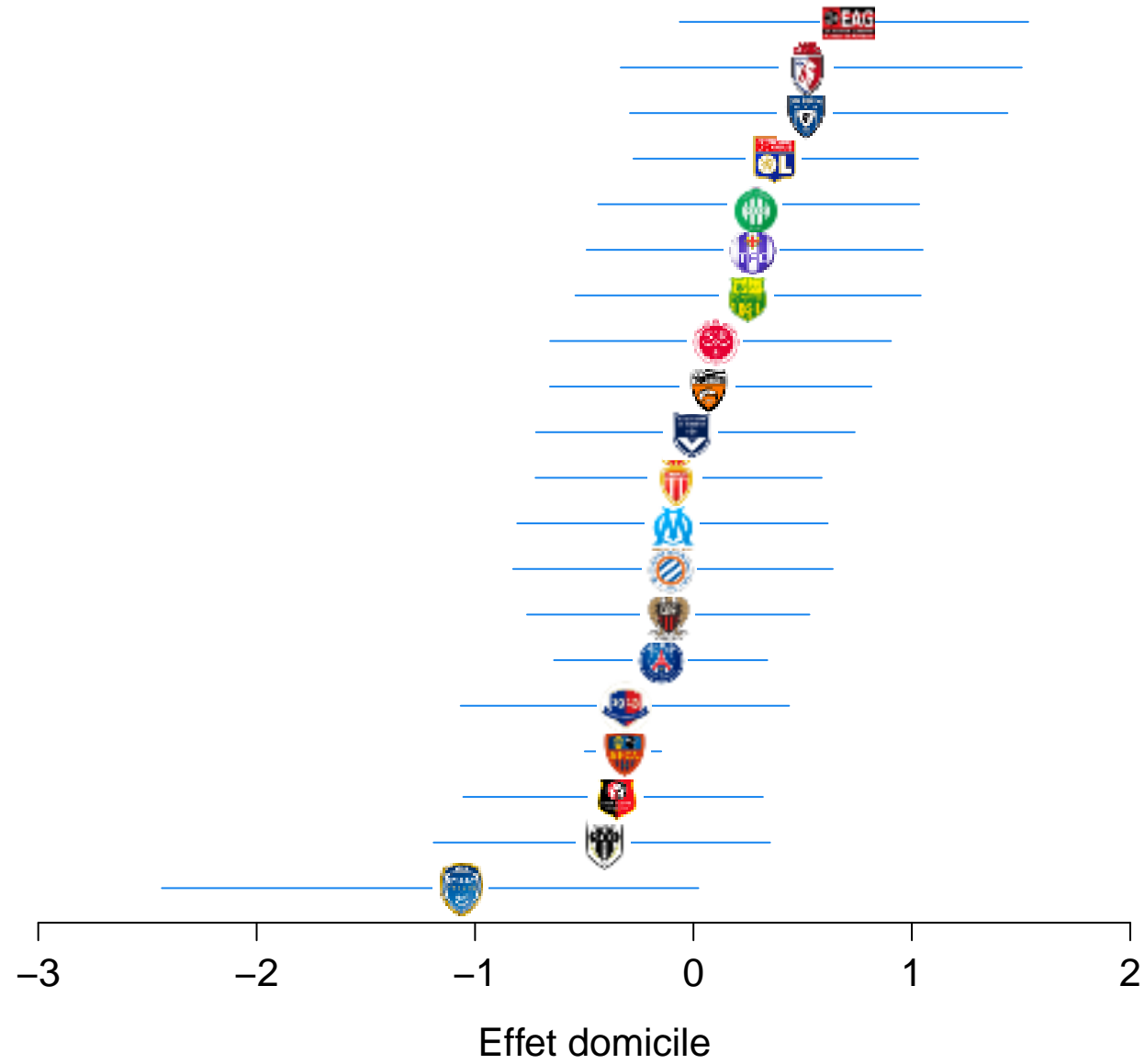
3. Football

4. Application

Les données

▷ Résultats

Pronostics



# Les chiffres c'est bien, mais les graphiques...

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

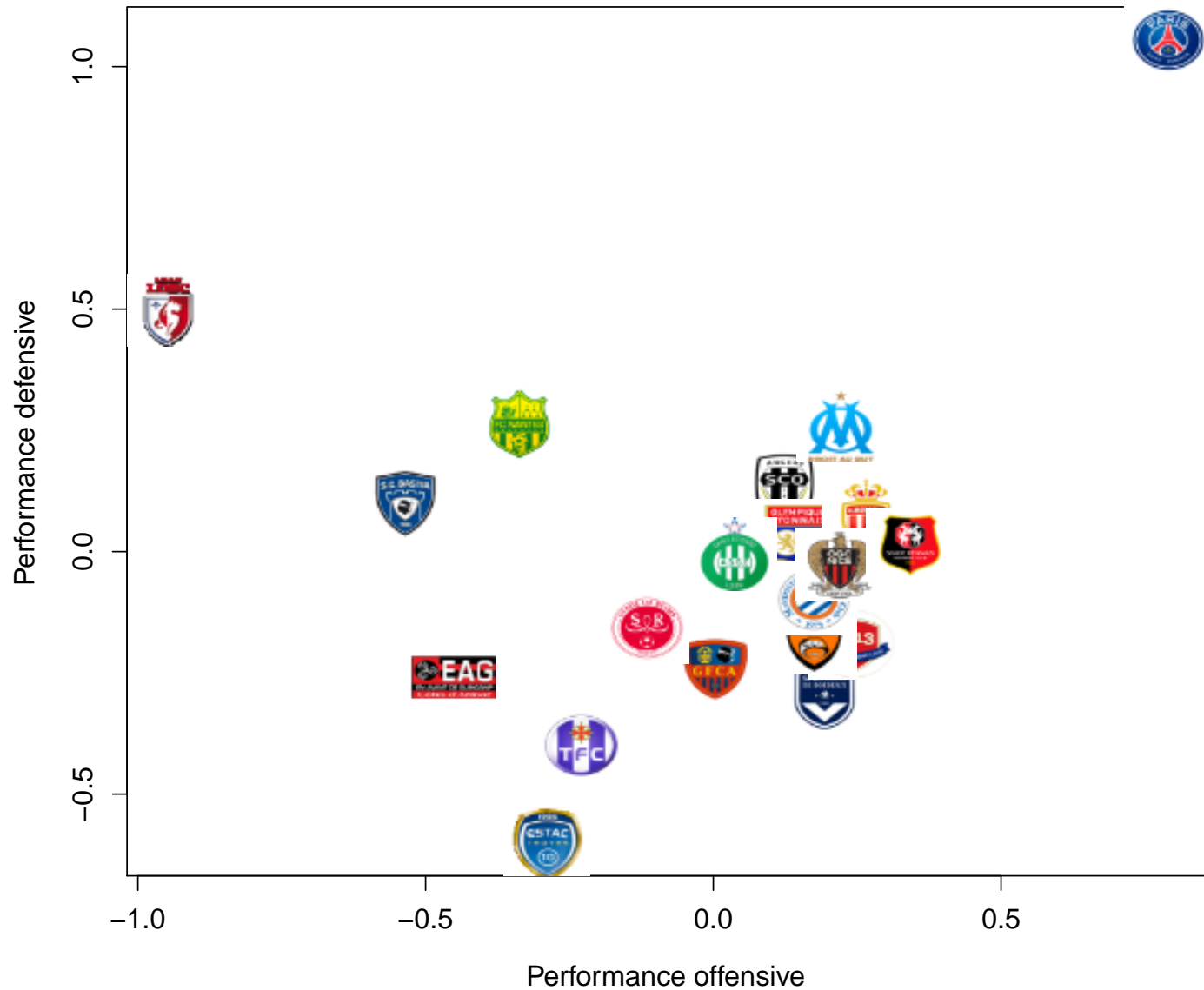
3. Football

4. Application

Les données

▷ Résultats

Pronostics



# Les chiffres c'est bien, mais les graphiques...

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

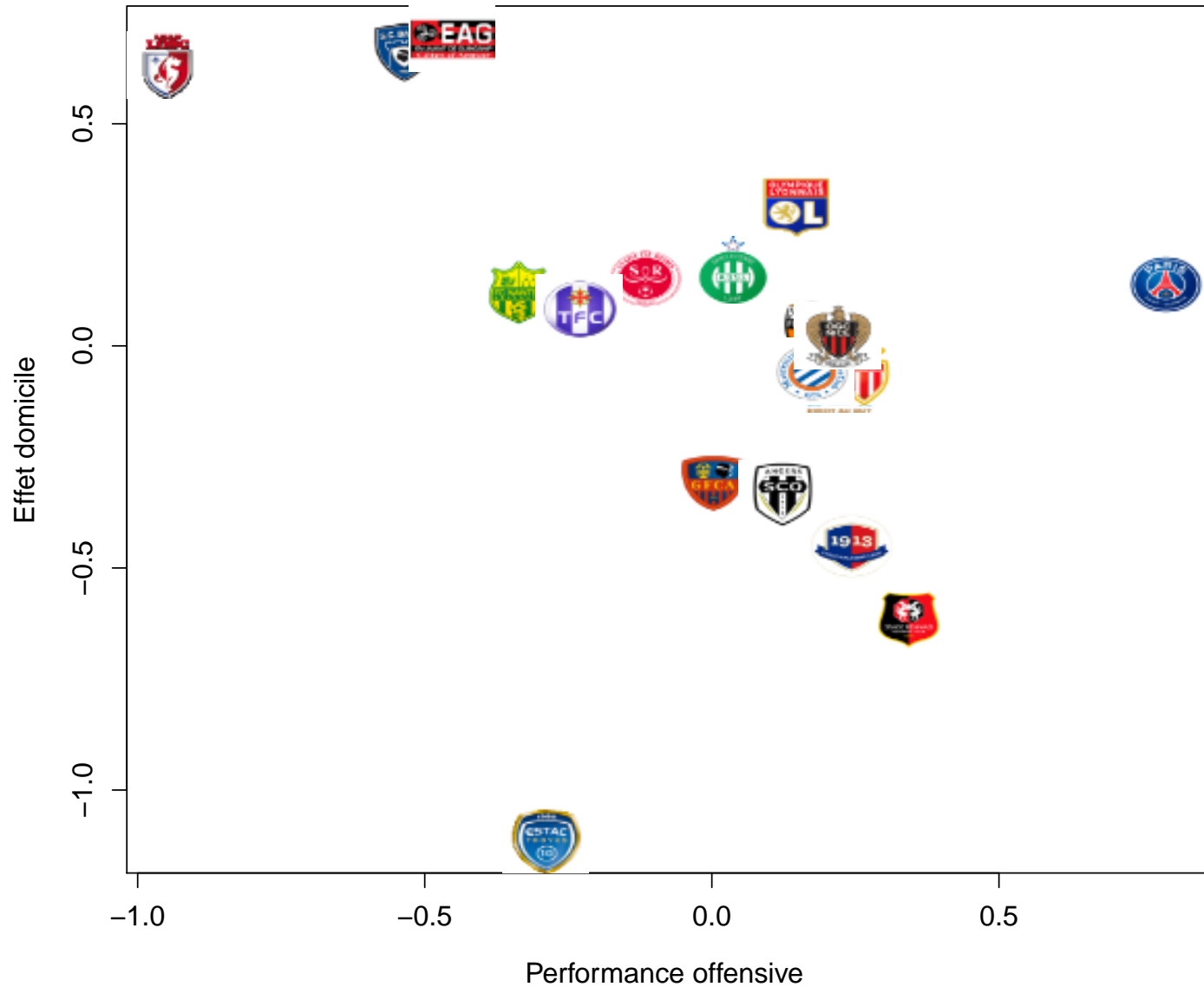
3. Football

4. Application

Les données

▷ Résultats

Pronostics



# Et les pronostics alors ?

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

Les données

Résultats

▷ Pronostics

- D'accord on connaît les paramètres mais je m'en fiche un peu en fait... Ce qui m'intéresse c'est le pronostic !

# Et les pronostics alors ?

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

Les données

Résultats

▷ Pronostics

- D'accord on connaît les paramètres mais je m'en fiche un peu en fait... Ce qui m'intéresse c'est le pronostic !
- La stratégie est toute simple... Illustrons la pour match de  $A$  recevant  $B$ .
  1. Je récupère les paramètres de  $A$  et ceux de  $B$  ;
  2. A l'aide de l'ordinateur, je génère des matchs fictifs avec ces paramètres, i.e.,

$$N_A \sim \text{Poisson}(\lambda_A), \quad N_B \sim \text{Poisson}(\lambda_B).$$

3. Sur ces matchs fictifs je regarde le nombre de fois où  $A$  à gagné par exemple. Si ce nombre est grand, je miserai sur la victoire de  $A$  (car c'est très probable).

**Exemple 3.** Pour le match PSG // Monaco de ce week-end, on a obtenu

$$\lambda_{\text{PSG}} = 1,99, \quad \lambda_{\text{Monaco}} = 0,43.$$

On fait alors jouer par ordinateur 5000 matchs fictifs (loi de Poisson), et on obtient

	1	N	2
PSG // Monaco	3716	892	392

👉 Je miserai donc sur une victoire de PSG—comme par hasard !!!

# Pronostic (enfin les proba.)

1. Les paris sportifs

2. Modélisation  
stochastique

3. Football

4. Application

Les données

Résultats

▷ Pronostics

**Table 2:** Probabilités renvoyées par le modèle pour les paris 1N2 de la 31ème journée de Ligue 1.

Match	1	N	2
Marseille // Rennes	0.34	0.32	0.34
St Etienne // Montpellier	0.37	0.31	0.32
Caen // Troyes	0.52	0.26	0.22
Reims // Guingamp	0.48	0.30	0.22
Angers // Lorient	0.28	0.37	0.35
Lille // Toulouse	0.49	0.35	0.17
Lyon // Nantes	0.50	0.32	0.18
Bordeaux // Bastia	0.35	0.35	0.30
Nice // Ajaccio GFCO	0.43	0.31	0.26
Paris SG // Monaco	0.73	0.20	0.07

MERCI !

(... et faites des maths !)



Chalkboard content:

Top left:  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$

Top right:  $\begin{pmatrix} I & | & A \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} I & | & A \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Middle left:  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Middle right:  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}}$

Bottom left:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bottom right:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1}}$