CORRECTION

Exercice 1.

1. Ce processus partage la même interprétation conceptuelle que le modèle de Smith — en fait c'est même un modèle de Smith mais avec des marges Gumbel unitaires. Ainsi

   i) U_i représente le centre du i-ième orage

   ii) ξ_i représente l'intensité du i-ième orage

   iii) la fonction $x \mapsto c - (x - U_i)^2/(2\sigma^2)$ contrôle la dispersion de l'intensité du i-ième orage au fur et à mesure que l'on s'éloigne du i-centre orageux U_i.

   Finalement, le processus $\{Z(x)\}$ représente le maximum pris en chaque point de l'espace après une infinité d'orages — comme le montre la Figure 1.

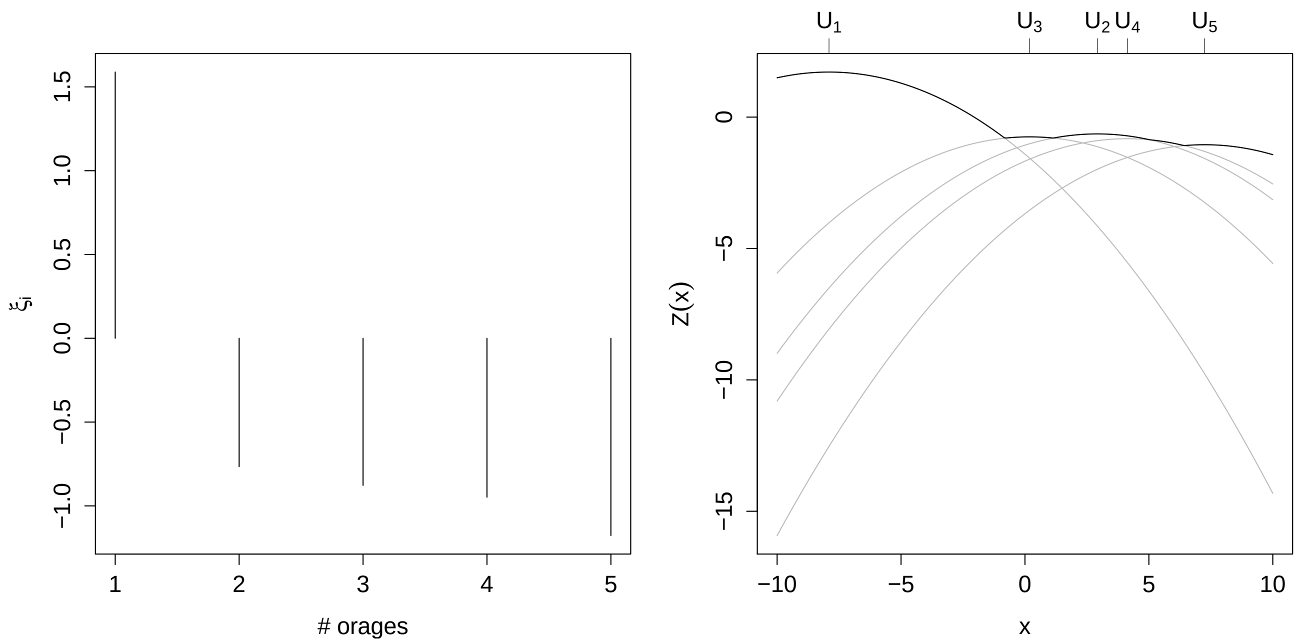

FIGURE 1 – Interprétation conceptuelle du processus du problème 1. Les courbes grises correspondent à chacun des orages, la courbe noires au processus max-stable.

2.

$$
\begin{aligned}
\Pr[Z(x_1) \le z_1, \ldots, Z(x_k) \le z_k] &= \Pr\left[c + \xi_i - \frac{(x_j - U_i)^2}{2\sigma^2} \le z_j,\, j = 1, \ldots, k,\, j \ge 1\right] \\
&= \exp\left[-\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{I}\left\{\xi > \min_{j=1,\ldots,k}\left(z_j + \frac{(x_j - u)^2}{2\sigma^2} - c\right)\right\} e^{-\xi} \mathrm{d}\xi \, \mathrm{du}\right] \\
&= \exp\left[-\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\min_{j=1,\ldots,k}\left(z_j + \frac{(x_j - u)^2}{2\sigma^2} - c\right)\right\} \mathrm{du}\right] \\
&= \exp\left[-\int_{\mathbb{R}} \max_{j=1,\ldots,k} \exp\left\{-\left(z_j + \frac{(x_j - u)^2}{2\sigma^2} - c\right)\right\} \mathrm{du}\right] \\
&= \exp\left[-\int_{\mathbb{R}} \max_{j=1,\ldots,k} e^{-z_j} e^c \exp\left\{-\frac{(x_j - u)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{du}\right]
\end{aligned}
$$

3. En faisant tendre tous les $z_j \to \infty$ sauf z_1, on obtient d'après la question précédente

$$
Pr[Z(x_1) \le z_1] = \exp\left[-e^{-z_1} e^c \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - u)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{du}\right].
$$

Or

$$
\int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - u)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{du} = \sqrt{2\pi\sigma^2},
$$

donc pour obtenir des marges Gumbel unitaires, il faut que

$$
e^c = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Longleftrightarrow c = -\frac{1}{2} \log\left(2\pi\sigma^2\right).
$$

4. Nous avons

$$
\begin{aligned}
e^{-z_1} \varphi_{\sigma^2}(U) > e^{-z_2} \varphi_{\sigma^2}(U + x_2 - x_1) &\Longleftrightarrow (U + x_2 - x_1)^2 - U^2 > 2\sigma^2(z_1 - z_2) \\
&\Longleftrightarrow (x_2 - x_1)(2U + x_2 - x_1) > 2\sigma^2(z_1 - z_2) \\
&\Longleftrightarrow 2(x_2 - x_1)U > 2\sigma^2(z_1 - z_2) - (x_2 - x_1)^2.
\end{aligned}
$$

Comme $U \sim N(0, \sigma^2)$, $2(x_2 - x_1)U \sim N\left\{0, 4(x_2 - x_1)^2\sigma^2\right\}$, on a

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[e^{-z_1} \varphi_{\sigma^2}(U) > e^{-z_2} \varphi_{\sigma^2}(U + x_2 - x_1)\right] &= \Phi\left\{\frac{2\sigma^2(z_1 - z_2) - (x_2 - x_1)^2}{2|x_2 - x_1|\sigma}\right\} \\
&= \Phi\left\{\frac{\sigma}{|x_2 - x_1|}(z_1 - z_2) + \frac{|x_1 - x_2|}{2\sigma}\right\} \\
&= \Phi\left(\frac{z_1 - z_2}{a} + \frac{a}{2}\right).
\end{aligned}
$$

5. Nous avons

$$
-\log \Pr[Z(x_1) \le z_1, Z(x_2) \le z_2] = \int_{\mathbb{R}} \max_{j=1,2} e^{-z_j} \varphi_{\sigma^2}(x_j - u) \mathrm{du} = I_1 + I_2,
$$

où

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-z_1} \varphi_{\sigma^2}(x_1 - u) \mathbb{I}\left\{e^{-z_1} \varphi_{\sigma^2}(x_1 - u) > e^{-z_2} \varphi_{\sigma^2}(x_2 - u)\right\} \mathrm{du}, \\
I_2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-z_2} \varphi_{\sigma^2}(x_2 - u) \mathbb{I}\left\{e^{-z_1} \varphi_{\sigma^2}(x_1 - u) < e^{-z_2} \varphi_{\sigma^2}(x_2 - u)\right\} \mathrm{du}.
\end{aligned}
$$

Commençons par calculer I_1, le calcul de I_2 suivra par symétrie. Notons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-z_1}\varphi_{\sigma^2}(x_1-u)\mathbb{I}\left\{e^{-z_1}\varphi_{\sigma^2}(x_1-u) > e^{-z_2}\varphi_{\sigma^2}(x_2-u)\right\}\mathrm{du}\\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-z_1}\varphi_{\sigma^2}(u)\mathbb{I}\left\{e^{-z_1}\varphi_{\sigma^2}(u) > e^{-z_2}\varphi_{\sigma^2}(u+x_2-x_1)\right\}\mathrm{du}\\
&= e^{-z_1}\Pr\left[e^{-z_1}\varphi_{\sigma^2}(U) > e^{-z_2}\varphi_{\sigma^2}(U+x_2-x_1)\right], \qquad U\sim N(0,\sigma^2).
\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question **??** on trouve bien que

$$I_1 = e^{-z_1}\Phi\left(\frac{z_1-z_2}{a}+\frac{a}{2}\right).$$

Un calcul similaire donne I_2 et finalement la fonction de répartition bivariée.

6. La fonction du coefficient extrême est donnée par

$$\theta(x_1-x_2) = \frac{\log\Pr[Z(x_1)\leq z, Z(x_2)\leq z]}{\log\Pr[Z(x_1)\leq z]} = 2\Phi\left(\frac{|x_1-x_2|}{2\sigma}\right).$$

En particulier plus σ est grand plus les extrêmes ont une dépendance spatiale forte.

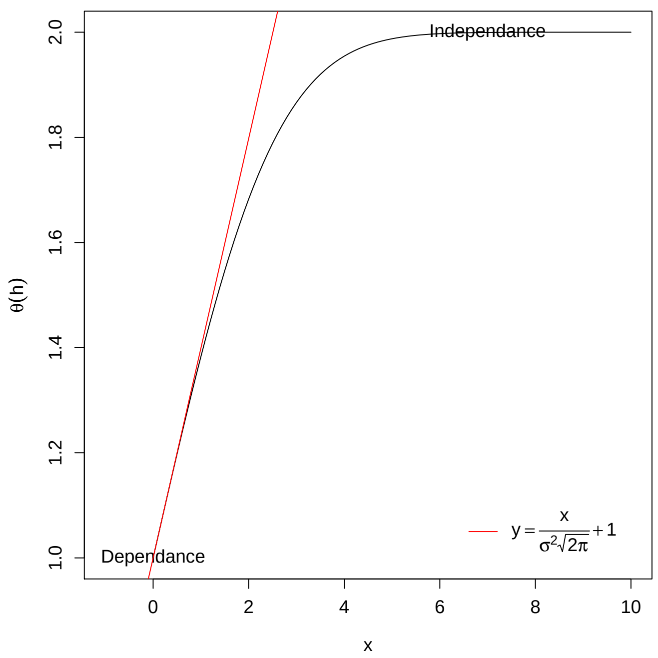

FIGURE 2 – Fonction du coefficient extrême.

7. Un développement de limité du premier ordre nous donne facilement

$$\theta(h) \overset{0}{\sim} 1 + \frac{h}{\sigma}\varphi(0) = 1 + \frac{h}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}.$$

Ainsi proche de l'origine, la fonction du coefficient extrême se comporte comme la droite d'équation $y = x/(\sigma^2\sqrt{2\pi})+1$ — voir la Figure 2.

Exercice 2.

1. Comme $\{Z(x)\}$ et $\tilde{Z}$ ont des marginales Fréchet unitaires et que $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $Z_*(x)$ est à valeur dans $(0, \infty)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Commençons par calculer $\Pr[Z(x) \leq z]$, $z > 0$.

$$\begin{aligned}\Pr[Z_*(x) \leq z] &= \Pr[\alpha_1 Z(x) \leq z, \alpha_2 \tilde{Z} \leq z]\\ &= \Pr[\alpha_1 Z(x) \leq z] \Pr[\alpha_2 \tilde{Z} \leq z]\\ &= \exp\left(-\frac{\alpha_1}{z}\right) \exp\left(-\frac{\alpha_2}{z}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{z}\right).\end{aligned}$$

Il faut donc que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ cela revient donc à considérer le processus

$$Z_*(x) = \max\left\{\alpha Z(x), (1-\alpha)\tilde{Z}\right\}, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

2. Soient $Z_{*,1}, \dots, Z_{*,n}$ des réplications indépendantes de Z_*. Comme nous venons de montrer que Z_* avait des marges Fréchet unitaires, il faut donc prouver que

$$\frac{1}{n} \max_{i=1,\dots,n} Z_{*,i} \overset{\text{fidi}}{=} Z_*.$$

Pour tout $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned}\Pr\left[\frac{1}{n}\max_{i=1,\dots,n} Z_{*,i}(x_1) \leq z_1, \dots, \frac{1}{n}\max_{i=1,\dots,n} Z_{*,i}(x_k) \leq z_k\right] &= \Pr\left[Z_*(x_1) \leq nz_1, \dots, Z_*(x_k) \leq nz_k\right]^n\\ &= \Pr[\alpha Z(x_1) \leq nz_1, \dots, \alpha Z(x_k) \leq nz_k]^n \Pr[(1-\alpha)\tilde{Z} \leq nz_1, \dots, (1-\alpha)\tilde{Z} \leq nz_k]^n\\ &= \exp\left\{-\frac{\alpha}{n} V(z_1, \dots, z_k)\right\}^n \exp\left\{-\max_{j=1,\dots,k} \frac{1-\alpha}{nz_j}\right\}^n\\ &= \exp\left\{-\alpha V(z_1, \dots, z_k)\right\} \exp\left\{-\max_{j=1,\dots,k} \frac{1-\alpha}{z_j}\right\}\\ &= \Pr[\alpha Z(x_1) \leq z_1, \dots, \alpha Z(x_k) \leq z_k] \Pr[(1-\alpha)\tilde{Z} \leq z_1, \dots, (1-\alpha)\tilde{Z} \leq z_k]\\ &= \Pr\left[Z_*(x_1) \leq z_1, \dots, Z_*(x_k) \leq z_k\right].\end{aligned}$$

Donc $\{Z_*(x)\}$ est bien max-stable. Note : on aurait pu aller plus vite en constatant que Z était un processus max-stable simple et que $\tilde{Z}$ était une v.a. Fréchet unitaire et donc que

$$\begin{aligned}\Pr[\alpha Z(x_1) \leq nz_1, \dots, \alpha Z(x_k) \leq nz_k]^n &= \Pr[\alpha Z(x_1) \leq z_1, \dots, \alpha Z(x_k) \leq z_k]\\ \Pr[(1-\alpha)\tilde{Z} \leq nz_1, \dots, (1-\alpha)\tilde{Z} \leq nz_k]^n &= \Pr[(1-\alpha)\tilde{Z} \leq z_1, \dots, (1-\alpha)\tilde{Z} \leq z_k].\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\Pr[Z_*(x_1) \leq z, Z_*(x_2) \leq z] &= \Pr\left[Z(x_1) \leq \frac{z}{\alpha}, Z(x_2) \leq \frac{z}{\alpha}\right] \Pr\left[\tilde{Z} \leq \frac{z}{1-\alpha}\right]\\ &= \exp\left\{-\frac{\alpha\theta(x_1 - x_2)}{z}\right\} \exp\left\{-\frac{1-\alpha}{z}\right\}\\ &= \exp\left\{-\frac{\alpha\theta(x_1-x_2) + 1 - \alpha}{z}\right\}\end{aligned}$$

et donc que la fonction du coefficient extrême s'écrit

$$\theta_{Z_*}(h) = 1 + \alpha\{\theta_Z(h) - 1\}.$$

Pour un modèle de Smith isotropique nous savons que $\theta_Z(h) \to 2$ lorsque $h \to \infty$ de sorte que $\theta_{Z_*}(h) \to 1 + \alpha$ lorsque $h \to \infty$. Ainsi α contrôle la borne supérieure de la fonction du

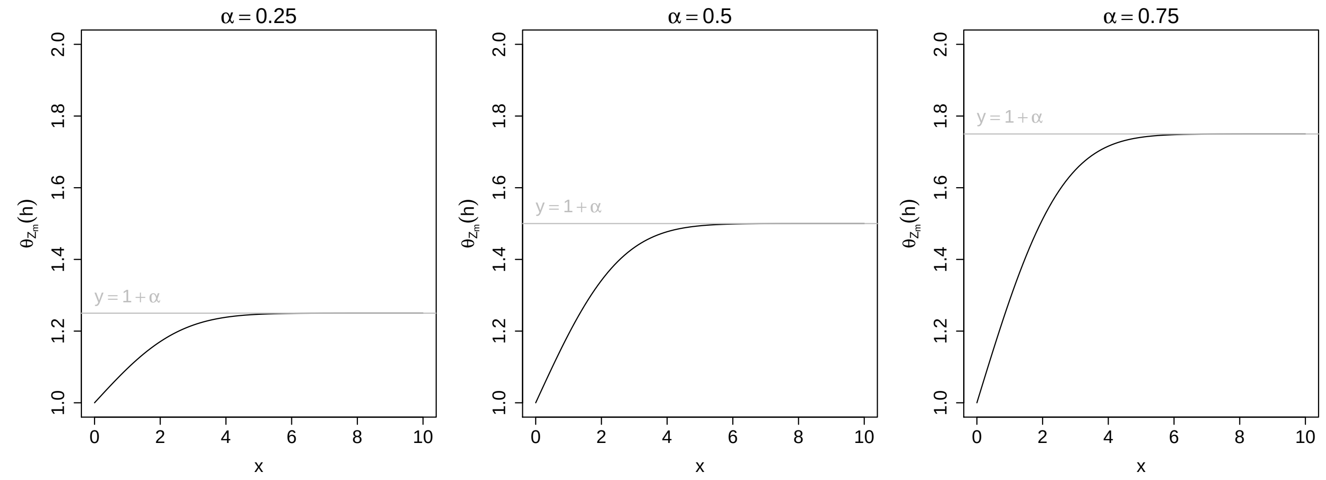

FIGURE 3 – Graphe de $\theta_{Z_*}(h)$ en fonction de α (question 3).

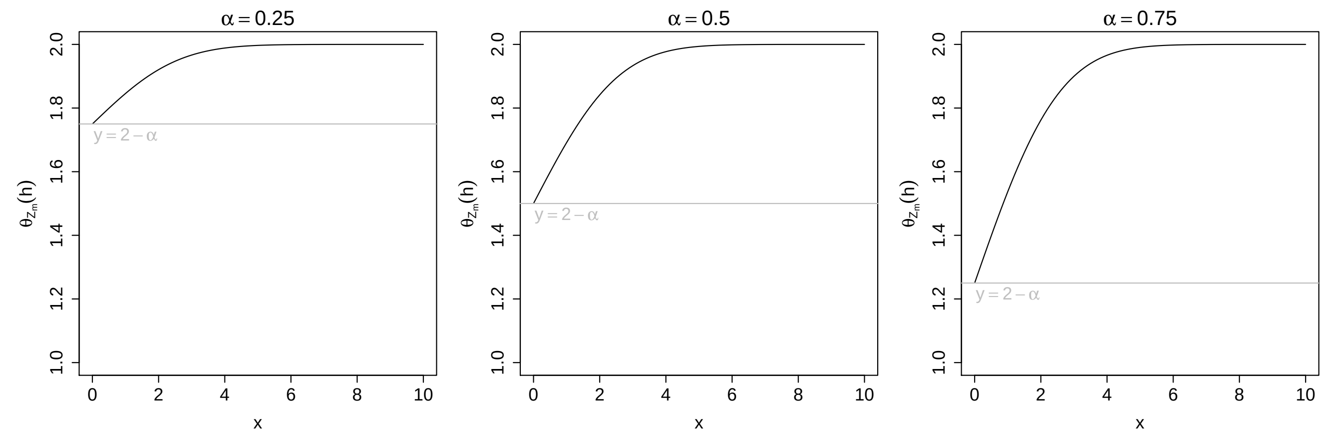

FIGURE 4 – Graphe de $\theta_{Z_*}(h)$ en fonction de α (question 4).

coefficient extrême et plus α est petit plus il sera impossible d'atteindre l'indépendance des extrêmes — voir Figure 3.
En particulier lorsque $\alpha = 0$, $\theta_{Z_*} = 1$ pour tout h ce qui signifie que nous sommes toujours dans la dépendance complète ce qui est logique puisqu'alors

$$Z_*(x) = \tilde{Z}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\Pr[Z_*(x_1) \leq z, Z_*(x_2) \leq z] &= \Pr[\alpha Z(x_1) \leq z, \alpha Z(x_2) \leq z] \Pr[(1-\alpha)\tilde{Z}(x_1) \leq z, (1-\alpha)\tilde{Z}(x_2) \leq z] \\
&= \exp\left\{-\frac{\alpha\theta_Z(x_1 - x_2)}{z}\right\} \exp\left\{-\frac{2(1-\alpha)}{z}\right\} \\
&= \exp\left[-\frac{2 + \alpha\{\theta_Z(x_1 - x_2) - 2\}}{z}\right],
\end{aligned}$$

et donc que

$$\theta_{Z_*}(h) = 2 + \alpha\{\theta_Z(x_1 - x_2) - 2\}.$$

Le graphe de $\theta_{Z_*}(h)$ est donné par la figure 4. En particulier α joue un rôle d'effet de pépite, c.à.d. qu'il induit un saut à l'origine de $\theta_{Z_*}(h)$.
Lorsque $\alpha = 0$, $\theta_{Z_*}(h) = 2$ pour tout $h > 0$ ce qui est logique puisqu'alors

$$Z_*(x) = \tilde{Z}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

et donc que $\{Z_*(x)\}$ est un bruit Fréchet unitaire.