## Feuille d'exercices

**Exercice 1** (Lois de Laplace impropres)**.** Considérons le modèle exponentiel $\mathrm{Exp}(\lambda)$.

a) Donnez la loi a priori de Laplace pour ce modèle.

b) Est-elle impropre ? Et si oui quelles sont les précautions à prendre ?

c) On dispose d'un $n$-échantillon iid $(x_1, \dots, x_n)$ selon ce modèle.

   (a) Montrer que la loi marginale de $x_1, \dots, x_n$ vaut

$$n! \left( \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^{-n-1}.$$

   (b) Que vaut la loi a posteriori ?

✎ ✎ ✎

**Exercice 2** (Loi a priori de Jeffreys)**.** Soit un modèle statistique Gaussien $N(\mu, \sigma^2)$.

a) Quelle est la loi a priori de Jeffreys pour $\mu$ et $\sigma$ ?

b) Quelle est la loi a priori de Jeffreys pour $\mu$ et $\sigma^2$ ?

c) Nous avons vu en cours que la loi a priori de Jeffreys n'était pas recommandée pour plus d'un paramètre. Dans de telles situations, il est de coutume de prendre le produit des lois a priori de Jeffreys sur chacun des paramètres individuels, i.e., considérer

$$\prod_{j=1}^{p} \pi_J(\theta_j), \qquad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)^\top,$$

   où $\pi_j(\theta_j)$ désigne la loi a priori de Jeffreys pour le paramètre $\theta_j$.
   Faites le calcul pour notre modèle Gaussien.

✎ ✎ ✎

**Exercice 3** (Réminiscence d'examen)**.** On s'intéresse au modèle demi-normal dont la densité est donnée par

$$f(x; \sigma) = \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left( -\frac{x^2}{\sigma} \right), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad \sigma > 0.$$

a) Déterminez la loi a priori de Jeffreys pour ce modèle.

b) Est-elle impropre ?

c) Si l'on dispose d'un $n$–échantillon iid, que vaut alors la loi a posteriori avec notre loi a priori de Jeffreys ?

✎ ✎ ✎

**Exercice 4** (Loi conjuguée)**.** Soient $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$. On prend pour loi a priori pour $\lambda$ une $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Que vaut alors la loi a posteriori ?

✎ ✎ ✎

**Exercice 5** (Wikipedia)**.** a) Dans Google tapez « conjugate priors » et allez sur la page wikipedia correspondante.

b) Allez à la Section « Table of conjugate distributions » (en anglais donc).

c) Dans le tableau des lois discrètes, sélectionnez deux lignes et retrouvez les résultats énoncés.

d) Faites de même pour le tableau des lois continues.

✎ ✎ ✎

**Exercice 6** (Moyenne a posteriori)**.** Soit un modèle paramétrique $\{f(x,\theta)\colon x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta\}$ auquel on ajoute une loi a priori $\pi$ sur $\theta$. On suppose de plus que le modèle Bayésien est suffisamment régulier pour autoriser l'interversion du signe intégral et dérivée.

Un estimateur Bayésien est défini comme la quantité $\hat{\theta}$ telle que

$$\hat{\theta} = \underset{\psi \in \Theta}{\arg\min}\ \mathbb{E}_\pi\{L(\theta,\psi) \mid x\},$$

où $L$ est une fonction de perte, i.e., $L\colon \Theta \times \mathscr{D} \to \mathbb{R}_+$ où $\mathscr{D}$ représente l'ensemble des décisions possibles. Par exemple, si nous décidons d'estimer $\theta$ alors $\mathscr{D} = \Theta$.

a) On considère une fonction de perte quadratique, i.e., $\mathscr{D} = \Theta$ et

$$L(\theta,\psi) = \|\theta - \psi\|_2^2.$$

Que vaut l'estimateur Bayésien associé ?

b) On considère une fonction de perte de type $L_1$, i.e., $\mathscr{D} = \Theta$ et

$$L(\theta,\psi) = \|\theta - \psi\|_1.$$

Que vaut l'estimateur Bayésien associé ?

✎ ✎ ✎

**Exercice 7** (Placenta praevia)**.** Le terme médical *placenta praevia* designe un mauvais positionnement du placenta qui se retrouve placé anormalement bas dans l'utérus. Outre le risque d'hémorragies accrue lors de la grossesse, on se pose également la question de l'augmentation ou non de la probabilité d'avoir une fille lors de cette anomalie.

Une étude allemande a été conduite en ce sens pour laquelle, sur les 980 grossesses de type *praevia* arrivées à terme, 437 ont enfanté des filles. Ces données indique-t-elle une plus forte probabilités d'avoir une fille pour ce type de grossesses ? On rappelle que dans la population générale de nouveaux nés, la proportion de filles est de 0.485.

a) Quel modèle paramétrique statistique utiliseriez vous ici ?

b) On suppose une loi a priori $U(0,1)$ pour le paramètre du modèle. Que vaut alors la loi a posteriori ?

c) On considère à présent une loi a priori $\text{Beta}(\alpha,\beta)$. Que vaut alors la loi a posteriori ?

d) A l'aide des questions précédentes et du logiciel `R` remplissez le Tableau 1. Expliquez le raisonnement logique derrière le choix des hyper-paramètres ?

e) A partir du Tableau 1 complété, quelles conclusions pouvez vous tirer ?

✎ ✎ ✎

Table 1 – Impact de la loi a priori sur la loi a posteriori sur les données *placenta praevia*

| $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ | $\alpha + \beta$ | Médiane a posteriori | IC symétrique à 95% |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 2 | | |
| 0.485 | 2 | | |
| 0.485 | 5 | | |
| 0.485 | 10 | | |
| 0.485 | 20 | | |
| 0.485 | 100 | | |
| 0.485 | 200 | | |

**Exercice 8** (Loi prédictive a posteriori)**.** On reprend ici le modèle Poissonien

$$X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} \text{Poisson}(\lambda), \qquad \lambda > 0,$$

et, travaillant dans un cadre Bayésien, nous prenons comme loi a priori $\pi(\lambda) \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

a) Rappelez l'expression pour la loi a posteriori—cf. exercice déjà fait !

b) Donnez l'expression de la loi prédictive a posteriori ? Est ce une loi connue ?

c) Si vous deviez donner une estimation pour une future observation, quelle serait elle ?

✎ ✎ ✎